GABRIELA LICEA

PROCESE ȘI APLICAȚII

Partea a II-a

Editura Universităţii din Bucureşti

GABRIELA LICEA

PROCESE ȘI APLICAȚII

Partea a II-a

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
2005

Referenți științifici: Prof. univ. dr. Ion CUCULESCU
Prof. univ. dr. Constantin TUDOR

Șos. Panduri, 90-92, București – 050663; Telefon/Fax: 410.23.84
E-mail: editura_unibuc@yahoo.com
Internet: www.editura.unibuc.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
LICEA, GABRIELA
Procese și aplicații: [curs] / Gabriela Licea – București: Editura Universității din București, 2003 vol.

ISBN 973-575-745-1
Partea 2. – 2005 – ISBN 973-575-997-7

519.216(075.8)

Cuprins

INTRODUCERE

Această carte se adresează studenţilor de la secţia de studii aprofundate (masterat), doctoranzilor şi cercetătorilor în domeniul proceselor stocastice şi al aplicaţiilor lor. Se folosesc în mod curent rezultate expuse în [9].

Capitolul 1 se ocupă de teoria generală a proceselor. Se face clasificarea timpilor de stopare asociaţi unui cîmp de probabilitate filtrat, se intoduc corpurile boreline stocastice şi se dau teoremele de secţiune cu consecinţele lor, dintre care cele mai importante sunt teoremele de proiecţie.

Capitolul 2 îşi propune un studiu detaliat al proceselor cu variaţie mărginită. Elementul specific care face legătura cu teoria martingalelor este noţiunea de proiecţie previzibilă duală sau compensatorul unui astfel de proces.

Capitolul 3 introduce noţiunea de ortogonalitate (tare) în mulţimea martingalelor de pătrat integrabil şi dă teorema de reprezentare a unui martingal de pătrat integrabil ca suma unei serii de martingale ortogonale, dintre care unul este continuu iar celelalte sunt salturile compensate ale martingalului iniţial.

Capitolul 4 este consacrat aplicaţiilor. Se aplică teoria din capitolele anterioare la construcţia integralei stocastice în raport cu un martingal de pătrat integrabil care nu este neapărat continuu . Se obţine o extensie a formulei lui Ito pentru un semimartingal în sens restrîns, numită formula de schimbare de variabilă ([11]).

Capitolul 1

Teoreme de secţiune

1.1 Previzibilitate, accesibilitate, total inaccesibilitate

In acest capitol $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, t \in R_+)$ este un cîmp de probabilitate filtrat, îndeplinind condiţiile uzuale : $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ este complet şi $\mathcal{F}_0 \supset \{\Lambda \in \mathcal{F} \,|P(\Lambda) = 0\}$ şi filtraţia $(\mathcal{F}_t)_{t\in R_+}$este continuă la dreapta (adică

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s.>t} \mathcal{F}_s, \text{oricare ar fi } t \geq 0).$$

Vom nota

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\in R_+} \mathcal{F}_t)$$

Vom presupune cunoscute definiţia opţionalelor sau a timpilor aleatori (în acest text se folosesc ambele denumiri), relativi la filtraţia de mai sus, precum şi proprietăţile care decurg imediat din definiţii (vezi [9], paragraf 2.5, pag 59-61).

Definiţia 1.1 *Un timp aleator (sau opţională) T se numeşte previzibil, dacă există un şir crescător de timpi aleatori (T_n) , astfel încît*

a) $\lim_n T_n = T$

b) $T_n < T$ *, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, pe mulţimea $\{T > 0\}$.*

Vom spune că şirul de opţionale (T_n) îl *anunţă* pe T. Din cauza condiţiilor impuse filtraţiei , definiţia nu se schimbă dacă cerem ca a) şi b) să fie îndeplinite numai a.s. Deasemenea, se poate înlocui mulţimea $\{T > 0\}$ de la b), cu mulţimea $\{+\infty > T > 0\}$. Intr-adevăr, în acest caz şirul $(\min(T_n, n))$, îl anunţă pe T.

Interpretări nematematice

Se pot imagina exemple de opţionale sau timpi aleatori previzibili din lumea reală. Să presupunem că un vas naufragiat şi părăsit este îndreptat de valuri spre un mal stîncos. Momentul impactului poate fi considerat timp previzibil anunţat de şirul T_n definit ca momentul cînd vasul se află la $1/n$ km de malul stîncos.

Exemplul 1.1 *1) Opţionalele egale a.s. cu o constantă (finită sau nu) sunt exemple de opţionale previzibile.*

2) Dacă T este o opţională şi a este un număr real strict pozitiv, atunci $T + a$ este o opţională previzibilă.

Cu ajutorul opţionalelor previzibile vom introduce alte clase de opţionale.

Definiţia 1.2 *O opţională T se numeşte accesibilă dacă există un şir (T_n) de opţionale previzibile, astfel încît*

$$P(\{T < +\infty\}) = P(\bigcup_n \{T = T_n < +\infty\})$$

sau, echivalent,

$$\{T < +\infty\} = \bigcup_n \{T = T_n < +\infty\}, P \text{ a.s.}$$

(Dacă $A, B \in \mathcal{F}$, "$A \subset B$, P *a.s.*" înseamnă $P(A \setminus B) = 0$, iar "$A = B$, P *a.s.*" , înseamnă $P(A\Delta B) = 0$, unde $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).

Definiţia 1.3 *Spunem că mulţimea $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(R_+)$ este evanescentă, dacă $P(\pi(A)) = 0$, unde π este proiecţia de la $\Omega \times R_+$ la Ω.*

Se ştie că $\pi(A) \in \mathcal{F}$, deoarece $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ este complet (teorema 3.5.[9])

Se vede uşor că T este accesibilă, dacă şi numai dacă există un şir de (T_n) de opţionale previzibile, astfel încît

$$[T] \subset \bigcup_n [T_n] \, ,$$

cu excepţia unei mulţimi evanescente.

Spunem că şirul (T_n) din definiţia 1.2 *"înglobează graficul lui T"*.

Definiţia 1.4 *Opţionala T este total inaccesibilă, dacă oricare ar fi opţionala previzibilă S, avem*

$$P(\{T = S < \infty\}) = 0,$$

sau, echivalent, dacă

$$[T] \cap [S] = \Phi,$$

cu excepţia unei mulţimi evanescente.

Punctul $a)$ din propoziţia următoare stabileşte că dacă se consideră opţionala ca o v.a. numerică (adică luînd valori în $[0, +\infty]$) şi dacă se iau clasele de echivalenţă ale acestor v.a. în raport cu egalitatea a.s. , proprietatea de a fi opţională (respectiv opţională previzibilă , sau accesibilă, sau total inaccesibilă), este o proprietate de clasă.

In loc de "o opţională previzibilă" vom spune simplu "o previzibilă", dacă contextul permite această prescurtare. La fel şi pentru celelalte clase de opţionale.

Propoziţia 1.1 *a) Dacă T este o opţională (repectiv previzibilă, respectiv accesibilă , respectiv total inaccesibilă) şi $S : \Omega \to [0, +\infty]$ are proprietatea că $S = T$ a.s., rezultă că S este opţională (respectiv previzibilă, respectiv accesibilă, respectiv total inaccesibilă) .*

b) O opţională previzibilă este şi accesibilă.

c) O opţională total inaccesibilă este aproape sigur strict pozitivă.

d) Fie T o opţională. Atunci T este total inaccesibilă (respectiv accesibilă) dacă şi numai dacă oricare ar fi S accesibilă (respectiv , total inaccesibilă), are loc relaţia $P(\{T = S < +\infty\}) = 0$.

e) Dacă T este simultan total inaccesibilă şi accesibilă, rezultă $T = +\infty$ a.s.

Demonstraţiile acestor proprietăţi sunt lăsate pe seama cititorului. Ele rezultă imediat din definiţii, cu excepţia afirmaţiei "dacă" pentru caracterizarea unui T accesibil, conţinută la punctul $d)$, care este o consecinţă a teoremei de partiţie de mai jos.

Definiţia 1.5 *Fie T o opţională şi $A \in \mathcal{F}_T$. Funcţia T_A, definită prin :*

$$T_A(\omega) = T(\omega), \ \text{dacă}\ \omega \in A \,\text{şi}\ T_A(\omega) = +\infty, \ \text{dacă}\ \omega \notin A$$

se numeşte restricţia lui T la A.

Deşi T_A nu este o funcţie restricţie, denumirea de mai sus este sugerată de faptul că graficul lui T_A se obţine reţinînd din graficul lui T, porţiunea de deasupra mulţimii A. Condiţia $A \in \mathcal{F}_T$ este necesară şi suficientă pentrucă restricţia lui T la A să fie tot opţională, adică

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty | T_A \text{ este timp aleator}\}$$

Teorema 1.1 *(de partiţie) Fie T o opţională. Există două mulţimi esenţial unice în $\mathcal{F}_T$, notate cu A şi B, astfel încît*

$$\{T < +\infty\} = A \cup B, \ A \cap B = \Phi, \ a.s.$$

cu T_A opţională accesibilă , iar T_B opţională total inaccesibilă.

`Demonstratie` Stabilim întîi unicitatea. Dacă A' şi B' sunt mulţimi cu proprietăţile lui A şi B respectiv, din propoziţia 1.1 $d)$ rezultă

$$P(\{T_A = T_{B'} < +\infty\}) = 0,$$

adică

$$P(A \cap B') = 0$$

de unde $A \subset A'$, a.s. Analog, $A' \subset A$, a.s., deci $A = A'$, a.s.

Pentru a demonstra existenţa, să considerăm mulţimea

$$\mathcal{H} = \{ \ \{T = S < +\infty\} \ | \ S \text{ previzibilă } \}$$

şi să definim mulţimea A prin relaţia

$$\mathbf{1}_A = \sup ess\{\mathbf{1}_C | \ C \in \mathcal{H}_\sigma\}$$

(se notează $\gamma = \sup\{P(C) | C \in \mathcal{H}_\sigma\}$ şi se alege un şir $(C_n) \subset \mathcal{H}_\sigma$, crescător şi astfel încît $\gamma = \lim_n P(C_n)$. Atunci $A = \cup_n C_n$)

Mulţimea $A \in \mathcal{H}_\sigma$, deci există in şir de previzibile (S_n) astfel încît

$$A = \bigcup_n \{T = S_n < +\infty\}, \text{a.s.}$$

Din această relaţie rezultă

$$[T_A] \subset \bigcup_n [S_n],$$

cu excepţia unei mulţimi evanescente, deci T_A este accesibilă. Să notăm $B = \{T < +\infty\} \setminus A$ şi să arătăm că T_B este total inaccesibilă. Intr-adevăr, dacă S este previzibilă, avem

$$\{T_B = S < +\infty\} \subset B \cap \{T = S < +\infty\} \subset B \cap A \text{ a.s.},$$

ultima incluziune avînd loc din definiţia lui A. Rezultă

$$P(\{T_B = S < +\infty\}) = 0$$

Teorema este demonstrată.

Definiţia 1.6 *Vom numi T_A (respectiv, T_B) partea accesibilă (respectiv, partea total inaccesibilă) a lui T.*

Fie T o opţională şi (S_n) un şir crescător de opţionale. Introducem următoarea mulţime :

$$K[T,(S_n)] = \{\lim_n S_n = T < +\infty,\ S_n < T, \text{pentru orice } n \in \mathbf{N}\}$$

Mai jos, notăm $S = \lim_n S_n$.

Propoziţia 1.2 *a) S restrînsă la $K[S,(S_n)]$ este previzibilă.*

b) T restrînsă la $K[T,(S_n)]$ este accesibilă.

`Demonstraţie` Să notăm $A = K[S,(S_n)]$ şi $B = K[T,(S_n)]$

Fie deasemenea, R_n restricţia lui S_n la mulţimea $\{S_n < S\}$. Se observă că $\lim_n R_n = S_A$, iar

$$\{0 < S_A < +\infty\} \subset \bigcap_n \{R_n < S_A\},$$

Atunci şirul $\min(R_n, n)$ îl anunţă pe S_A.

Pentru a demonstra $b)$, este suficient să observăm că $A \supset B$ şi

$$[T_B] \subset [S_A]$$

deoarece pe B opţionalele T şi S coincid .

Teorema 1.2 *a) Opţionala T este accesibilă, dacă şi numai dacă există o familie numărabilă de şiruri $(S_n^{(k)})_n$, $k \in \mathbf{N}$, cu proprietatea că*

$$\{0 < T < +\infty\} = \bigcup_k K[T, (S_n^{(k)})],$$

b) Opţionala T este total inaccesibilă, dacă şi numai dacă $P\{T = 0\} = 0$ şi $P(K[T, (S_n)]) = 0$, oricare ar fi şirul crescător de opţionale (S_n).

`Demonstratie` *a)* Pentru implicaţia "numai dacă", se alege un şir (S_k) ce îl înglobează pe T şi apoi , pentru fiecare k, se notează cu $(S_n^{(k)})$ şirul care îl anunţă pe S_k. Egalitatea celor două mulţimi este imediată.

Implicaţia" dacă" rezultă din incluziunea evidentă

$$[T] \subset [0] \cup \bigcup_k [T_k])$$

unde am notat cu T_k, restricţia lui T la $K[T, (S_n^{(k)})]$. Din punctul *b)* al propoziţiei anterioare, fiecare T_k este accesibilă, iar opţionala identic egală cu 0 este previzibilă.

b) Dacă T este total inaccesibilă şi (S_n) este un şir crescător de opţionale, avem

$$K[T, (S_n)] = \{T = T_{K[T,(S_n)]} < +\infty\}$$

şi folosind Propoziţia 1.2 b) şi Propoziţia 1.1 d) , se obţine

$$P(K[T, (S_n)]) = 0.$$

Pentru a demonstra reciproca, fie S o opţională previzibilă şi (S_n) un şir care o anunţă pe S. Avem

$$\{T = S < +\infty\} = \{0 < S = T < +\infty\} \subset K[T, (S_n)] \ ,$$

de unde

$$P\{T = S < +\infty\} = 0,$$

deci T este total inaccesibilă. Teorema este demonstrată.

Punctul *b)* al acestei teoreme sugerează următoarea denumire pentru mulţimie

$$K[T, (S_n)] :$$

mulţimea de accesibilitate a lui (S_n) la T. Cu această denumire T , strict pozitivă a.s., este total inaccesibilă, dacă şi numai dacă mulţimea de accesibilitatea la T a oricărui şir crescător este de probabilitate nulă.

Propoziţia 1.3 *Dacă T si S sunt previzibile (respectiv accesibile, respectiv total inaccesibile), rezultă că* $\min(T,S)$ *şi* $\max(T,S)$ *sunt previzibile(respectiv accesibile, respectiv total inaccesibile).*

Demonstratie In cazul opţionalelor previzibile, fie (T_n) şi (S_n) două şiruri ce anunţă pe T şi S, respectiv. Atunci min (T_n, S_n) şi $\max(T_n, S_n)$ o anunţă pe $\min(T,S)$ şi respectiv, pe $\max(T,S)$. Intr-adevăr, în cazul lui $\min(T,S)$, avem

$$\begin{aligned}\{0 &< \min(T,S)\} \subset \{0 < T\} \cap \{0 < S\} \subset \\ (\bigcap_n \{T_n &< T\}) \cap (\bigcap_n \{S_n < S\}) \subset \bigcap_n \{\min(T_n, S_n) < \min(T,S)\}\end{aligned}$$

Să presupunem acum că T şi S sunt total inaccesibile şi să arătăm că $\max(T,S)$ este total inaccesibilă. Fie R o opţională previzibilă. Avem

$$\begin{aligned}P(\{\max(T,S) &= R < +\infty\}) \leq \\ &\leq P(\{T = R < +\infty\}) + P(\{S = R < +\infty\})\end{aligned}$$

Cei doi termeni din membrul drept sunt nuli pentrucă T şi S sunt total inaccesibile.

Demonstraţia se poate continua uşor pentru toate celelalte cazuri şi o lasăm în seama cititorului.

Propoziţia 1.4 *Fie (T_n) un şir monoton de opţionale şi $T = \lim_n T_n$.*

a) Dacă şirul este crescător şi opţionalele lui sunt previzibile (respectiv accesibile), rezultă că T este previzibilă (respectiv, accesibilă)

b) Dacă şirul este descrescător şi opţionalele lui sunt previzibile (respectiv accesibile), şi dacă pentru aproape orice ω există un n astfel încît $T(\omega) = T_n(\omega)$, rezultă că T este previzibilă (respectiv, accesibilă).

Demonstraţie *a)* Dacă T_n este previzibilă şi $(T_{n,k})_k$ anunţă pe T_n, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$,şirul $(S_n)_n$,unde

$$S_n = \max\{T_{k,l} \mid k, l = 1, 2, ..., n\}$$

îl anunţă pe T. Lăsăm verificarea în seama cititorului.

Dacă T_n sunt accesibile, să considerăm mulţimea de accesibilitate a lui (T_n) la T,

$$K[T,(T_n)] = \{T < +\infty, T_n < T, \text{pentru orice } n \in \mathbf{N}\}$$

Are loc incluziunea

$$[T] \subset [T_{K[T,(T_n)]}] \cup (\bigcup_n [T_n])$$

iar în dreapta incluziunii de mai sus, se află o mulţime numărabilă de opţionale accesibile (prima este chiar previzibilă : Propoziţia 1.2 a))

b) Să presupunem opţionalele şirului $(T_n)_n$ previzibile şi pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$,fie $(T_{n,k})_k$ un şir care îl anunţă pe T_n. Avem

$$(1)\ T = \inf_n T_n = \inf_n \sup_k T_{n,k}$$

Putem presupune că termenii şirului $(T_{n,k})_k$ satisfac inegalitatea

$$P\{d(T_{n,k}, T_n) > 2^{-k}\} \leq 2^{-(n+k)} \text{ pentru orice } k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$$

unde d este o metrică pe $[0, +\infty]$ compatibilă cu topologia de pe $[0, +\infty]$ (spre exemplu $d(x, y) = |arctgx - arctgy|$). Aceasta este posibil trecînd eventual la un subşir pe care îl renotăm tot cu $(T_{n,k})_k$ pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$.

Cu această ipoteză, în relaţia (1) se pot permuta $\inf_n$ şi $\sup_k$. Intr-adevăr, fie

$$S_k = \inf_n T_{n,k} \text{ şi } S = \sup_k S_k = \sup_k \inf_n T_{n,k}$$

Sirul $(S_k)_k$ este crescător, şi $S_k \leq T$ pentru orice k, deci $S \leq T$. Avem

$$P(\{S < T\}) = P(\{d(S,T) > 0\}) = P(\bigcup_k \{d(S,T) > 2^{-k}\}) =$$

$$= \lim_k P(\{d(S,T) > 2^{-k}\})$$

Dar

$$P(\{d(S,T) > 2^{-k}\}) \leq P(\{d(S_k,T) > 2^{-k}\}) \leq$$

$$\leq P(\bigcup_n \{d(T_{n,k},T) > 2^{-k}\}) \leq P(\bigcup_n \{d(T_{n,k},T_n) > 2^{-k}\}) \leq$$

$$\leq \sum_n P(\{d(T_{n,k},T_n) > 2^{-k}\}) \leq \sum_n 2^{-(n+k)} = 2^{-k}$$

Făcînd $k \to +\infty$, se obţine $S = T$, a.s., deci $\lim_k S_k = T$,a.s. Dacă $T(\omega) > 0$,din ipoteză există $n(\omega)$, astfel încît $T(\omega) = T_{n(\omega)}(\omega)$. Atunci $T_{n(\omega),k}(\omega) <$

$T(\omega)$, pentru orice $k \in \mathbf{N}$. Deci $S_k(\omega) < T(\omega)$, pentru orice k. Sirul care îl anunţă pe T poate fi ales $R_k(\omega) = S_k(\omega)$, dacă $T(\omega) = S\ (\omega)$ şi

$$R_k(\omega) = \max(T(\omega) - \frac{1}{k}, 0),$$

dacă $T(\omega) \neq S\ (\omega)$.

Cazul opţionalelor accesibile este trivial , deoarece din ipoteză rezultă

$$[T] \subset \bigcup_n [T_n]$$

iar opţionalele T_n sunt accesibile.

1.2 Evenimente strict anterioare unui timp aleator

Definiţia 1.7 *Dacă T este un timp aleator sau opţională, definim*

$$\mathcal{F}_{T-} = \sigma(\mathcal{F}_0 \cup \{A \cup \{t < T\} \mid A \in \mathcal{F}_t,\ t \in \mathbf{R}_+\}$$

şi o numim $\sigma-$algebra evenimentelor strict anterioare lui T.

Observăm că în cazul $T \equiv t$,

$$\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{t-} = \sigma(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s)$$

Evident, avem

$$\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_T$$

unde, reamintim că

$$\mathcal{F}_T = \{A |\ A \in \mathcal{F}_\infty,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \in \mathbf{R}_+\}$$

([L] definiţia 2.13) şi se numeşte $\sigma-$ algebra evenimentelor anterioare lui T.

Vom da mai jos proprietăţi care completează pe cele din [9] propoziţia 2.12 e).

Propoziţia 1.5 *Fie S şi T doi timpi de stopare. Avem*

a) $\mathcal{F}_S \cap \{S < T\} \subset \mathcal{F}_{T-}, \{S < T\} \in \mathcal{F}_{T-}$

b) $\mathcal{F}_\infty \cap \{\infty = T\} \subset \mathcal{F}_{T-}$

`Demonstraţie` Dacă $A \in \mathcal{F}_S$, avem

$$A \cap \{S < T\} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}_+} (A \cap \{S \leq r\}) \cap \{r < T\}$$

şi incluziunea este imediată folosind [L], propoziţia 2.12 şi definiţia lui $\mathcal{F}_{T-}$. A doua relaţie de la *a)* se obţine din prima alegînd ca mulţime în $\mathcal{F}_S$ spaţiul total.

Pentru *b)*, observăm mai întîi că

$$\{\infty = T\} = \bigcap_n \{n < T\} \in \mathcal{F}_{T-}$$

şi apoi că, pentru orice $t \in \mathbf{R}_+$ şi $A \in \mathcal{F}_t$

$$A \cap \{\infty = T\} = (A \cap \{t < T\}) \cap \{\infty = T\} \in \mathcal{F}_{T-}$$

Demonstraţia se încheie, ţinînd cont de definiţia lui $\mathcal{F}_\infty$.

Propoziţia 1.6 *Fie S şi T două opţionale cu $S \leq T$. Atunci*
a) $\mathcal{F}_{S-} \subset \mathcal{F}_{T-}$
b) Dacă, in plus, $\{0 < T < \infty\} \subset \{S < T\}$ a.s.,
rezultă $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{T-}$.

`Demonstraţie` Punctul *a)* rezultă din faptul că generatorii lui $\mathcal{F}_{S-}$ sunt generatori şi pentru $\mathcal{F}_{T-}$. Intr-adevăr, fie $t > 0$ şi $A \in \mathcal{F}_t$. Avem

$$A \cap \{t < S\} = (A \cap \{t < S\}) \cap \{t < T\}$$

iar mulţimea dintre paranteze este în $\mathcal{F}_t$.

Pentru punctul *b)*, să alegem $A \in \mathcal{F}_S$ şi să-l reprezentăm sub forma

$$A = (A \cap \{T = 0\}) \cup (A \cap \{0 < T < \infty\}) \cup (A \cap \{T = \infty\})$$

Dacă se ţine cont de ipoteze, va fi adevărată şi reprezentarea

$$A = (A \cap \{S = 0\}) \cup (A \cap \{S < T\}) \cup (A \cap \{T = \infty\})$$

In dreapta egalului, prima mulţime este în $\mathcal{F}_0$([9],propoziţia 2.12 e)). Celelalte două sunt în $\mathcal{F}_{T-}$ din propoziţia precedentă.

Propoziţia 1.7 *Fie (T_n) un şir monoton de opţionale şi $T = \lim_{n\to\infty} T_n$.*

a) Dacă (T_n) este descrescător, atunci $\mathcal{F}_T = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$,iar dacă $\{0 < T_n < \infty\} \subset \{T < T_n\}$ a.s., pentru orice n, rezultă

$$\mathcal{F}_T = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n -}$$

b) Dacă (T_n) este crescător, atunci $\mathcal{F}_{T-} = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{T_n-})$, iar dacă $\{0 < T < \infty\} \subset \{T_n < T\}$ a.s., pentru orice n, rezultă $\mathcal{F}_{T-} = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{T_n})$

`Demonstraţie` Prima egalitate de la *a)* s-a demonstrat în [9] propoziţia 2.15, iar a doua rezultă din Propoziţia 1.6 b) şi din prima egalitate.

Pentru prima egalitate de la *b)*, incluziunea " $\supset$ " este Propoziţia 1.6 a). Pentru cealaltă incluziune, se ia un $A \in \mathcal{F}_t$, unde $t > 0$ şi se observă că avem

$$A \cap \{t < T\} = \bigcup_n (A \cap \{t < T_n\})$$

iar fiecare mulţime de sub reuniune este în generatorii lui $\mathcal{F}_{T_n-}$. Ultima egalitate de la *b)* rezultă din Propoziţia 1.6 b) şi din prima egalitate.

Să observăm că fiind dată o opţională T, totdeauna există un şir descrecător (T_n) verificînd ipotezele de la a) şi anume şirul $T_n = T + \frac{1}{n}$, dar proprietăţile de la b) sunt verificate numai dacă T este previzibil.

Ne reîntoarcem la proprietăţile claselor de timpi aleatori introduşi şi demonstrăm cum se comportă acestea la operaţia de "restricţie" introdusă în definiţia 1.5.

Propoziţia 1.8 *a)Fie T o opţională total inaccesibilă (respectiv accesibilă) şi $A \in \mathcal{F}_T$. Atunci T_A este total inaccesibilă (respectiv acccesibilă).*

b) Dacă T este previzibilă şi $A \in \mathcal{F}_{T-}, T_A$ rămîne previzibilă.

`Demonstraţie` a) Presupunem T accesibilă, $A \in \mathcal{F}_T$ şi S total inaccesibilă. Avem

$$P(\{T_A = S < \infty\}) \leq P(\{T = S < \infty\}) = 0$$

deci T_A este accesibilă (propoziţiea 1.1 d)). Analog se demonstrează proprietatea cînd T este total inaccesibilă.

b) Să presupunem acum T previzibilă. Fie

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F}_T | T_A \text{şi } T_{A^c} \text{ sunt previzibile}\}$$

(prin A^c am notat complementara lui A). Mulţimea $\mathcal{G}$ este o $\sigma-$algebră. Intradevăr , din definiţie se vede că dacă $A \in \mathcal{G}$, avem $A^c \in \mathcal{G}$. Dacă $A, B \in \mathcal{G}$,din

$$T_{A\cup B} = \min(T_A, T_B) \text{şi } T_{(A\cup B)^c} = \max(T_{A^c}, T_{B^c})$$

şi din Propoziţia 1.3 rezultă că $\mathcal{G}$ este stabil la reuniuni finite. Să luăm acum un şir ascendent (A_n) de mulţimi din $\mathcal{G}$. Avem

$$T_{\cup_n A_n} = \inf_n T_{A_n},$$

unde (T_{A_n}) este un şir descrescător de opţionale previzibile, şi pentru orice $\omega \in \Omega$, există un număr natural n_ω, astfel încît

$$T_{\cup_n A_n}(\omega) = T_{A_{n_\omega}}(\omega).$$

Aplicînd Propoziţia 1.4 rezultă că $T_{\cup A_n}$ este previzibilă. Analog,

$$T_{(\cup_n A_n)^c} = T_{\cap_n A_n^c} = \sup_n T_{A_n^c}$$

iar $(T_{A_n^c})$ este un şir crescător de previzibile. Din Propoziţia 1.4 rezultă că $T_{(\cup_n A_n)^c}$ este previzibilă.

Fie $A \in \mathcal{F}_{T-}$. Vom arăta că $A \in \mathcal{G}$ şi va rezulta că T_A este previzibilă. Deoarece $\mathcal{G}$ este $\sigma-$algebră , în baza Propoziţiei 1.7 b), putem presupune $A \in \mathcal{F}_{T_n}$, unde (T_n) este un şir care îl anunţă pe T. Dacă $S_n = T_{nA}$,avem

$$\{0 < T_A < \infty\} \subset A \cap \{0 < T < \infty\} \subset \bigcap_n \{S_n < T_A\}$$

de unde rezultă că şirul $\min\{S_n, n\}$ îl anunţă pe T_A. Analog se arată că T_{A^c} este previzibilă.

Propoziţia care urmează completează Propoziţia 1.5

Propoziţia 1.9 *Presupunem că S şi T sunt opţionale cu S previzibilă. Atunci*
a) $\mathcal{F}_{S-} \cap \{S \leq T\} \subset \mathcal{F}_{T-}$
b) $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{T-}$ şi $\{S = T\} \in \mathcal{F}_{T-}$

`Demonstraţie` Fie $A \in \mathcal{F}_{S-}$ şi fie (S_n) un şir care îl anunţă pe S. Din Propoziţia 1.7 b) rezultă că pot presupune $A \in \mathcal{F}_{S_n}$. Avem

$$A \cap \{S \leq T\} = (A \cap \{S = 0\}) \cup \bigcap_{k>n} (A \cap \{S_k < T\})$$

Prima mulţime din dreapta egalului este în $\mathcal{F}_0$, iar sub intersecţie toate mulţimile sunt în $\mathcal{F}_{T-}$(Propoziţia 1.5) Punctul b) rezultă din a), din egalitatea

$$\{S = T\} = \{S \leq T\} \backslash \{S < T\}$$

şi din Propoziţia 1.5

Propoziţia 1.10 *Dacă timpul de stopare T este previzibil, avem*

$$\mathcal{F}_{T-} = \{A \in \mathcal{F}_T | T_A \text{ este previzibil }\}$$

`Demonstraţie` Incluziune "$\subset$ " este propoziţia 1.8 b). Incluziunea inversă rezultă din egalitatea

$$A = \{T = T_A\} \backslash (A^c \cap \{T = \infty\})$$

şi din propoziţiile 1.9 b) şi 1.5 b).

Propoziţia următoare caracterizează timpii aleatori previzibili printre cei accesibili.

Propoziţia 1.11 *Fie S accesibil . S este previzibil dacă şi numai dacă oricare ar fi T previzibil , avem*

$$\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{T-}$$

`Demonstraţie` Implicaţia "numai dacă" este propoziţia 1.9 b). Pentru a demonstra reciproca, să considerăm un şir (S_n) de previzibile care îl înglobează pe S :

$$[S] \subset \bigcup_n [S_n]$$

şi să considerăm

$$T_n := S_{n\{S \leq S_n\}}.$$

Folosind ipoteza şi apoi propoziţia 1.8 b), rezultă că T_n sunt previzibile. Pe de altă parte, şirul (U_n) cu

$$U_n = \min_{1 \leq i \leq n} T_i$$

este descrescător, este format din previzibile, şi

$$\bigcup_n [U_n] \supset [S].$$

Se poate aplica propoziţia 1.4 b) şi rezultă că S este previzibilă.

Teorema următoare caracterizează filtraţiile pentru care orice opţională accesibilă este previzibilă.

Teorema 1.3 *Următoarele proprietăţi sunt echivalente :*
a) Orice opţională accesibilă este previzibilă
b) Oricare ar fi T previzibilă , avem $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$
c) Oricare ar fi şirul crescător de opţionale (T_n), cu $T = \lim T_n$, avem

$$\mathcal{F}_T = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{T_n})$$

Demonstraţie $a) \Rightarrow b)$ Fie $A \in \mathcal{F}_T$. Avem

$$(1)\ A = \{T_A = T\} \setminus (A^c \cap \{T = \infty\})$$

Opţionala T_A este accesibilă (propoziţia 1.8 a)), deci previzibilă şi aplicînd acelaşi raţionament ca în propoziţia 1.10 , se obţine $A \in \mathcal{F}_{T-}$.

$b) \Rightarrow a)$ Fie S accesibilă şi T previzibilă .

$$\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$$

deci , aplicînd propoziţia 1.11 rezultă S previzibilă.

$a)\&b) \Rightarrow c)$ Fie $A \in \mathcal{F}_T$. Din propoziţia 1.7 b) rezultă

$$\mathcal{F}_{T-} = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{T_n-}) \subset \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{T_n})$$

deci folosind (1) este suficient să arătăm că

$$\{T_A = T\} \in \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{T_n})$$

sau, analog, că

$$\{T_A = T < \infty\} \in \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{T_n})$$

Fie U şi V partea accesibilă şi respectiv, total inaccesibilă a lui T_A. Avem

$$\{T_A = T < \infty\} = \{U = T < \infty\} \cup \{V = T < \infty\}$$

Din ipoteză şi propoziţia 1.9 b) rezultă că prima mulţime este în $\mathcal{F}_{T-}$. A doua mulţime este în $\sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{T_n})$,deoarece

$$P(\{\lim T_n = V < \infty, T_n < V, \text{ pentru orice } n\}) = 0$$

(teorema 1.2 b)) şi

$$\{V = T < \infty\} = \bigcup_n \{T_n = V < \infty\},\ P\ a.s.$$

c) $\Rightarrow$ *b*) Fie T previzibilă şi (T_n) un şir care îl anunţă pe T. Avem, folosind propoziţia 1.7 b) şi ipoteza

$$\mathcal{F}_{T-} = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_{T_n}) = \mathcal{F}_T$$

Definiţia 1.8 *Se spune că filtraţia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ nu are timpi de discontinuitate sau este cuasicontinuă la stînga dacă satisface oricare dintre condiţiile a), sau b),sau c), din teorema 1.3.*

In final, să urmărim pe un exemplu (vezi şi [3], pag 63) cîteva dintre rezultatele acestui paragraf .

Exemplul 1.2 *Fie*

$$\Omega = [0,\infty),\ \mathcal{G} = \mathcal{B}([0,\infty)),$$

$$\mathcal{G}_t = \sigma(\{B \in \mathcal{B}([0,\infty))|B \subset [0,t],\ sau\ B \supset (t,\infty)\}), t \in [0,\infty)$$

Fie P o probabilitate pe $\mathcal{G}$ verificînd

$$P(\{0\}) = 0 şi\ P((t,\infty)) > 0,$$

pentru orice $t \in [0,\infty)$. Fie $\mathcal{F}$ completatul lui $\mathcal{G}$ şi

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}_t \cup \{\Lambda \in \mathcal{F}|P(\Lambda) = 0\})$$

($\mathcal{F}_t$ este augmentatul lui $\mathcal{G}_t$ în raport cu $\mathcal{F}$,conform definiţiei 2.12 [9]).

Să se verifice că

1) $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ este o filtraţie (crescătoare) continuă la dreapta.

2) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ este o filtraţie verificînd condiţiile uzuale.

Să notăm cu S identitatea pe Ω.

3) Să se arate că o variabilă aleatoare pozitivă T,definită pe Ω este opţională, dacă şi numai dacă există $s \in [0,\infty]$, astfel încît

$$[0,s] \subset \{T \geq S\} \text{şi } \{T = s\} \supset (s,\infty), P \text{ a.s.}$$

Fie T o opţională şi

$$A = \{\omega|P(\{\omega\}) > 0\}$$

4) Să se arate că T este previzibilă dacă şi numai dacă există

$s \in [0, \infty]$, astfel încît

$$[0, s) \subset \{T > S\} \text{şi } \{T = s\} \supset (s, \infty), P \text{ a.s.}$$

5) Să presupunem că A şi A^c nu au măsură nulă. Atunci S_A este partea accesibilă a lui S şi S_{A^c} este partea total inaccesibilă a lui S.

6) T este accesibilă dacă şi numai dacă

$$P(\{T = S_{A^c} < \infty\}) = 0$$

7) T este total inaccesibilă dacă şi numai dacă

$$P(\{T \neq S_{A^c} < \infty\}) = 0$$

8) Dacă A este vidă a.s. (P nu are atomi), orice timp aleator accesibil este previzibil. In acest caz filtraţia verifică pentru orice t,

$$\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t, \text{deşi } \{t\} \in \mathcal{G}_t, \text{dar } \{t\} \notin \mathcal{G}_{t-}.$$

8) Dacă $P(A) = 1, P$ are cel puţin doi atomi diferiţi de 0. S este accesibilă dar nu este previzibilă. Filtraţia $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ are timpi de discontinuitate. Nu există timpi aleatori total inaccesibili (cu excepţia celui egal cu ∞ a.s.)

9) Dacă P este ca la 5), S_A nu este previzibilă, filtraţia are timpi de discontinuitate.

1.3 Corpuri boreliene stocastice. Teoremele de secţiune

Să considerăm un cîmp de probabilitate filtrat $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, t \in \mathbf{R}_+)$ îndeplinind condiţiile uzuale (vezi începutul paragrafului anterior). In [9] s-au introdus (pe $\Omega \times \mathbf{R}_+$) corpul borelian al mulţimilor măsurabile , $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$, şi corpul borelian $\mathcal{P}_0$ al mulţimilor progresiv măsurabile, definit prin

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &= \{A \mid A \subset \Omega \times \mathbf{R}_+, \ A \cap (\Omega \times [0, t]) \in \\ &\in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t]), \text{ pentru orice } t \in \mathbf{R}_+\} \end{aligned}$$

Dacă S şi T sunt opţionale (relativ la cîmpul filtrat fixat mai sus) cu $S \leq T$, să considerăm intervalul stocastic

$$[S, T) = \{(\omega, t) | (\omega, t) \in \Omega \times \mathbf{R}_+, \ S(\omega) \leq t < T(\omega)\}$$

Vom defini acum $\sigma-$algebrele sau corpurile boreliene stocastice.

Definiţia 1.9 *Fie* $\mathcal{O}$(*respectiv* $\mathcal{A}$, *respectiv* $\mathcal{P}$) $\sigma-$ *algebrele generate de*

$$\{[T,\infty)|T \text{ opţională, (respectiv opţională accesibilă, respectiv opţională previzibilă}\}$$

Ele se numesc $\sigma-$*algebra mulţimilor opţionale (respectiv accesibile, respectiv previzibile).*

Au loc următoarele incluziuni :

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \supset \mathcal{P}_0 \supset \mathcal{O} \supset \mathcal{A} \supset \mathcal{P},$$

a doua fiind o consecinţă a faptului că procesul

$$\mathbf{1}_{[T,\infty)}$$

este adaptat şi continuu la dreapta ([9] , Propoziţia 3.3).Celelalte incluziuni sunt triviale. Dintre $\sigma-$ algebrele introduse mai sus, mai importante vor fi $\mathcal{O}$ şi $\mathcal{P}$, rolul lui $\mathcal{A}$ fiind acela de a face mai uşoară trecerea între cele două.

Definiţia 1.10 *Un proces real* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$(*respectiv* $\mathcal{P}_o$, *respectiv* $\mathcal{O}$, *respectiv* $\mathcal{A}$, *respectiv* $\mathcal{P}$)$-$ *măsurabil , se numeşte măsurabil (respectiv progresiv măsurabil, respectiv opţional, respectiv accesibil, respectiv previzibil).*

Propoziţiile următoare sunt caracterizări ale $\sigma-$algebrelor stocastice.

Propoziţia 1.12 *a)*$\mathcal{O}$(*respectiv* $\mathcal{A}$, *respectiv* $\mathcal{P}$) *este* $\sigma-$*algebra generată de*

$$\{[S,T)|S,T \text{ optionale (respectiv optionale accesibile, respectiv opţionale previzibile)}\}.$$

b) $\mathcal{O}$(*respectiv* $\mathcal{A}$, *respectiv* $\mathcal{P}$) *este* $\sigma-$*algebra generată de*

$$\{[S,T]|S \text{ optională (respectiv accesibilă, respectiv previzibilă), } T \text{ opţională}\}$$

c) $\mathcal{P}$ *este* $\sigma-$*algebra generată de* $\{0_A|A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{(S,T]|S,T \text{ opţionale}\}$

`Demonstraţie` Punctul a) rezultă din egalitatea

$$[S,T) = [S,\infty) \setminus [T,\infty)$$

Punctul b) rezultă din egalităţile

$$[S,T) = [S,T] \setminus [T] \text{şi } [S,T] = \bigcap_n [S, T + \frac{1}{n})$$

cu observaţia că $T + \frac{1}{n}$ este opţională previzibilă.

Pentru punctul c) observăm mai întîi că $0_A(\omega) = 0$,dacă $\omega \in A$ şi $0_A(\omega) = \infty$,dacă $\omega \notin A$, este opţională previzibilă. Punctul c) rezultă din b) şi din egalităţile

$$(S,T] = [0,T] \setminus [0,S]$$

şi

$$[S,T] = [0_{\{S=0\}}] \cup (\bigcap_n (S_n, T]),$$

în ultima egalitate S fiind previzibilă, iar (S_n) şirul care îl anunţă pe S.

Propoziţia este demonstrată.

Propoziţia 1.13 *a) $\mathcal{P}$ este cea mică $\sigma-$algebră faţă de care procesele adaptate şi continue la stînga sunt măsurabile.*

b) $\mathcal{O}$ este cea mai mică $\sigma-$algebră faţă de care procesele adaptate , continue la dreapta, cu limite finite la stînga sunt măsurabile.

`Demonstraţie` Demonstrăm întîi că

$$\mathcal{P} = \sigma\{x^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}),\ x \text{ proces adaptat, continuu la stînga}\}$$

Incluziuneá "$\subset$ " rezultă din faptul că $\mathbf{1}_{(S,T]}$,unde S şi T sunt timpi aleatori, este proces adaptat, continuu la stînga şi din Propoziţia 1.12 b). Reciproc, dacă x este proces adaptat şi continuu la stînga şi definim

$$(1)\ x_t^{(n)}(\omega) = x_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} x_{\frac{k}{n}}(\omega)\mathbf{1}_{(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}(t)$$

acesta este un proces $\mathcal{P}-$ măsurabil : într-adevăr, dacă $A \in \mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$(respectiv, $\mathcal{F}_0$) atunci

$$\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}(t) = \mathbf{1}_{((\frac{k}{n})_A,(\frac{k+1}{n})_A]}(\omega,t)$$

(respectiv,

$$\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) = \mathbf{1}_{[0_A]}(\omega, t))$$

este proces previzibil deoarece $((\frac{k}{n})_A, (\frac{k+1}{n})_A]$ (respespectiv, $[0_A]$) este interval stocastic în $\mathcal{P}$,pe baza propoziţiei 1.12 b). Această proprietate se extinde prin raţionamente standard pentru cazul în care în loc de A avem o funcţie măsurabilă în raport cu $\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$(respectiv, $\mathcal{F}_0$). In acest fel , folosind faptul că x este adaptat, $x^{(n)}$ este previzibil. Dar

$$(2) \ \lim_{n\to\infty} x^n(\omega, t) = x(\omega, t), \text{ pentru orice } \omega \in \Omega \text{și } t \in \mathbf{R}_+$$

Deci x este previzibil.

b) Incluziunea "$\subset$ " rezultă din faptul că procesul $\mathbf{1}_{[S,T)}$, unde S şi T sunt opţionale oarecari, este adaptat, continuu la dreapta ,cu limite finite la stînga.

Pentru a demonstra incluziunea inversă, să considerăm un proces adaptat, continuu la dreapta şi cu limite finite la stînga, x, un $\dot{\varepsilon} > 0$ şi să definim : $T_0^{(\varepsilon)} = 0, ...,$

$$T_{n+1}^{(\varepsilon)}(\omega) = \inf\{t > T_n^{(\varepsilon)}(\omega) | \ |x_t(\omega) - x_{T_n^{(\varepsilon)}}(\omega)| > \varepsilon\}$$

Mai întîi să arătăm inductiv, că funcţiile definite mai sus sunt timpi aleatori : într-adevăr, $T_0^{(\varepsilon)}$este opţională şi presupunînd că $T_n^{(\varepsilon)}$ este opţională , $T_{n+1}^{(\varepsilon)}$ este prima intrare în mulţimea progresiv măsurabilă

$$(T_n^{(\varepsilon)}(\omega), \infty) \cap \{(\omega, t) | \ |x_t(\omega) - x_{T_n^{(\varepsilon)}}(\omega)| > \varepsilon\}$$

şi se aplică [9], teorema 3.6 b). Sirul de opţionale $(T_n^{(\varepsilon)})$ are următoarele proprietăţi : a) este crescător

b) dacă $T_n^{(\varepsilon)}(\omega) < \infty$, rezultă

$$T_n^{(\varepsilon)}(\omega) < T_{n+1}^{(\varepsilon)}(\omega)$$

c) dacă $T_{n+1}^{(\varepsilon)}(\omega) < \infty$, din continuitatea la dreapta a traiectoriei $t \to x_t(\omega)$, rezultă

$$|x_{T_{n+1}^{(\varepsilon)}(\omega)}(\omega) - x_{T_n^{(\varepsilon)}}(\omega)| > \varepsilon$$

d) din existenţa şi finitudinea limitelor la stînga ale traiectoriei $t \to x_t(\omega)$, rezultă că şirul $(T_n^{(\varepsilon)}(\omega))$ nu are puncte de acumulare la distanţă finită, deci

$$\lim_{n\to\infty} T_n^{(\varepsilon)}(\omega) = \infty.$$

Fie $\omega \in \Omega$ şi $t \in [0, \infty)$. Definim

$$x_t^{(\varepsilon)}(\omega) = x_{T_n^{(\varepsilon)}}(\omega), \text{ dacă } t \in [T_n^{(\varepsilon)}(\omega), T_{n+1}^{(\varepsilon)}(\omega)),$$

pentru $n = 0, 1, 2, ...$Avem

$$|x_t^{(\varepsilon)}(\omega) - x_t(\omega)| \leq \varepsilon, \text{ deci } \lim_{\varepsilon \to 0} x_t^{(\varepsilon)}(\omega) = x_t(\omega).$$

Procesul $x^{(\varepsilon)}$ este opţional, deci x este opţional.

Demonstraţia este terminată.

Propoziţia 1.14 *Fie*

$$\begin{aligned} (3)\ \mathcal{C} &= \{(A \times \{0\}) \cup \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times (s_i, t_i]) \mid A \in \mathcal{F}_0,\ A_i \in \mathcal{F}_{s_i}, \\ s_i, t_i &\in \mathbf{R}_+, (A_i \times (s_i, t_i]) \cap (A_j \times (s_j, t_j]) = \Phi,\ \textit{dacă} \\ i, j &= 1, 2, ..., n, i \neq j, n \in \mathbf{N}\} \end{aligned}$$

Atunci

a) $\mathcal{C}$ este algebră

b) $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}$

`Demonstraţie` Punctul a) se verifică prin raţionamente clasice de Teoria Măsurii şi se lasă pe seama cititorului.

Să observă că incluziunea "$\subset$ " rezultă din punctul a) al propoziţiei anterioare, deoarece indicatorii mulţimilor din $\mathcal{A}$ sunt procese adaptate, continue la stînga .

Incluziunea inversă rezultă din demonstraţia aceluiaşi punct, observînd că procesul $x^{(n)}$ introdus prin relaţia (1) din propoziţia 1.13 este $\sigma(\ \mathcal{C})-$ măsurabil. Intr-adevăr, prin raţionamente standard, pornind de la funcţii indicator , se verifică faptul că fiecare termen din membrul drept al relaţiei (1) este $\sigma(\ \mathcal{C})-$ măsurabil. Demonstraţia incluziunii se termină datorită lui (2).

Propoziţia 1.15 *Fie x previzibil (respectiv opţional) şi T o opţională. Atunci funcţia $x_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ este măsurabilă în raport cu $\mathcal{F}_{T-}$(respectiv $\mathcal{F}_T$)*

`Demonstraţie` Să presupunem $x = \mathbf{1}_{[S,R)}$ cu S şi R previzibile. Atunci

$$x_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}(\omega) = \mathbf{1}_{\{S \leq T < R\}}(\omega)$$

iar $\{S \leq T]\} \in \mathcal{F}_{T-}$ şi $\{T < R\} \in \mathcal{F}_{T-}$(proproziţia 1.9 b)).Dacă notăm cu $\mathcal{H}$ mulţimea proceselor previzibile mărginite care au proprietate din enunţ, $\mathcal{H}$ este spaţiu vectorial real care conţine $\mathbf{1}_{\Omega\times\mathbf{R}_+}$şi odată cu orice şir crescător de funcţii, conţine şi limita lui (în ipoteza că este mărginită). Deasemenea, $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$,unde

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{1}_{[S,R)} |\ S \text{şi } R \text{ previzibile }\}$$

iar produsul a două funcţii din $\mathcal{M}$, rămîne tot în $\mathcal{M}$: dacă U şi V sunt previzibile,

$$\mathbf{1}_{[S,R)}\mathbf{1}_{[U,V)} = \mathbf{1}_{[\max(S,U),\ \max(\min(R,V),\max(S,U))}$$

şi din propoziţia 1.3, rezultă că funcţia din dreapta egalităţii este în $\mathcal{M}$. Aplicînd o teoremă de clasă monotonă ([13], pag7), rezultă că $\mathcal{H}$ conţine funcţiile mărginite măsurabile în raport cu $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{P}$. Trecerea la funcţii nu neapărat mărginite (procese previzibile oarecare), se face minimizînd un astfel de proces cu n şi apoi făcînd pe n să tindă la ∞.

Pentru cazul x opţional, raţionamentul se poate face analog. Acest al doilea caz rezultă şi ca o consecinţa a faptului că x este progresiv măsurabil şi atunci, $x_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ este $\mathcal{F}_T-$măsurabilă ([7], propoziţia1.2.18).

Teoremele de secţiune vor fi corolarul următoarei leme, în care am notat cu π proiecţia de la $\Omega \times \mathbf{R}_+$ la Ω.

Lema 1.1 *Fie $\mathcal{T}$ o mulţime de timpi aleatori care satisface următoarele proprietăţi :*

a) $0 \in \mathcal{T}$ *şi* $\infty \in \mathcal{T}$
b) $S \in \mathcal{T}$ *şi* $T = S$ *a.s* $\Rightarrow T \in \mathcal{T}$
c) $S, T \in \mathcal{T} \Rightarrow \max(S,T), \min(S,T) \in \mathcal{T}$
d) $S, T \in \mathcal{T} \Rightarrow S_{\{S<T\}} \in \mathcal{T}$
e) dacă (S_n) este un şir crescător de opţionale din $\mathcal{T}$, rezultă că $\lim S_n \in \mathcal{T}$.

Definim

$$\mathcal{J} = \{ \bigcup_{i=1}^{n} [S_i, T_i) \mid S_i, T_i \in \mathcal{T} \text{ , pentru } i = 1, 2, ..., n, n \in \mathbf{N}\}$$

Au loc următoarele proprietăţi :

1) Dacă $J \in \mathcal{J}_\delta$ şi $D_J(\omega) = \inf\{t|(\omega, t) \in J\}$, atunci $D_J \in \mathcal{T}$ şi $[D_J] \subset J$.

2) Pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $A \in \sigma(\mathcal{J})$, există $T \in \mathcal{T}$ astfel încît

$$[T] \subset A \text{şi } P(\pi(A)) \leq P(\{T < \infty\}) + \varepsilon$$

Demonstraţie Pentru fiecare $\omega \in \Omega$ cu proprietatea că $D_J(\omega) < \infty$, secţiunea ω prin J, adică mulţimea J_ω, este închisă în topologia dreaptă a lui $\mathbf{R}_+$, deci $\inf J_\omega \in J_\omega$ sau $D_J(\omega) \in J_\omega$, de unde rezultă că $[D_J] \subset J$.

Pentru a demonstra prima parte a lui 1), să observăm că D_J este timp aleator fiind prima intrare într-o mulţime progresiv măsurabilă (teorema 3.6 b) din [L]). Dacă $J = [S, T)$, atunci $D_J = S_{\{S<T\}}$ şi rezultă că $D_J \in \mathcal{T}$ din proprietatea d) . Dacă

$$J = \bigcup_{i=1}^{n} [S_i, T_i),$$

are loc egalitatea

$$D_J = \inf_{1 \leq i \leq n} S_{i\{S_i < T_i\}}$$

şi din proprietatea c) care afirmă că $\mathcal{T}$ este latice, rezultă $D_J \in \mathcal{T}$. Dacă $J \in \mathcal{J}_\delta$, să presupunem $J = \cap_n J_n$,unde $J_n \in \mathcal{J}$ pentru orice n. Fie

$$\mathcal{S} = \{S \mid S \in \mathcal{T},\ S \leq D_J\}$$

Mulţimea $\mathcal{S}$ are următoarele proprietăţi : este nevidă , deoarece $0 \in \mathcal{S}$, este latice şi dacă (S_n) este un şir crescător de funcţii din $\mathcal{S}$, rezultă că $\lim S_n = \sup S_n \in \mathcal{S}$ (se folosesc şi proprietăţile analoage ale lui $\mathcal{T}$). Rezultă că

$$T = ess \sup \mathcal{S} \in \mathcal{S}$$

Din inegalitatea $T \leq D_J$, rezultă $J \subset [T, \infty)$, relaţie din care se vede că putem presupune că

$$J = \bigcap_n (J_n \cap [T, \infty)).$$

Din această egalitate, din $T \in \mathcal{T}$ şi din faptul că $\mathcal{J}$ este închisă la intersecţii finite (de fapt $\mathcal{J}$ este algebră), rezultă că se poate presupune $J_n \subset [T, \infty)$ (înlocuind J_n cu $J_n \cap [T, \infty)$), pentru fiecare n. Această incluziune implică $T \leq D_{J_n}$. Se vede uşor că $D_{J_n} \in \mathcal{S}$, deci avem şi $T \geq D_{J_n}$.Va rezulta $T = D_{J_n}$,de unde $[T] \subset J_n$, pentru fiecare n şi $[T] \subset \cap_n J_n = J$, deci $T \geq D_J$ şi în final

$$T = D_J,\ D_J \in \mathcal{T} \text{şi } [D_J] \subset J.$$

Să demonstrăm acum 2). Fie $A \in \sigma(\ \mathcal{J}\ )$ şi $\varepsilon > 0$. Mulţimea $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ şi aplicînd teorema de secţiune 3.7 [9], rezultă că există $Z : \Omega \to [0, \infty]$, măsurabilă $\mathcal{F}$, astfel încît

$$[Z] \subset A \text{şi } \{Z < \infty\} = \pi(A)$$

Fie $B \in \sigma(\mathcal{J})$. Definim

$$\lambda(B) = P(\pi(B \cap [Z])$$

Funcţia λ este o măsură pe $\sigma(\mathcal{J})$, nulă înafara lui A şi $\lambda(A) = P(\pi(A))$. Deoarece $\mathcal{J}$ este algebră, aplicînd un rezultat cunoscut din Teoria Măsurii, există un şir descrescător (J_n), cu $J_n \in \mathcal{J}$ astfel încît

$$J := \bigcap_n J_n \subset A \text{şi } \lambda(J) > \lambda(A) - \varepsilon$$

Mulţimea $J \in \mathcal{J}_\delta$ şi dacă D_J este debutul lui J ,aplicînd punctul 1) al lemei $D_J \in \mathcal{T}$ şi $[D_J] \subset J$.

Fie $T = D_J$. Avem $T \in \mathcal{T}$, $[T] \subset A$, şi

$$P(\pi(A)) = \lambda(A) < \ \lambda(J) + \varepsilon \leq P(\pi(J)) + \varepsilon = P(\{T < \infty\}) + \varepsilon$$

Lema este demonstrată.

Teorema 1.4 *(teoremele de secţiune) Fie $A \in \mathcal{O}$ (respectiv $\mathcal{A}$, respectiv $\mathcal{P}$) şi $\varepsilon > 0$. Există o opţională (respectiv o opţională accesibilă, respectiv o opţională previzibilă) T , astfel încît*

$$[T] \subset A \text{şi } P(\pi(A)) \leq P(\{T < \infty\}) + \varepsilon$$

`Demonstraţie` Se aplică lema , alegînd $\mathcal{T} = \{T \mid T$ opţională (respectiv opţională accesibilă respectiv opţională previzibilă$\}$şi verificînd că în toate cele trei cazuri, proprietăţile a)−e) din lemă sunt îndeplinite. Verificarea se face pe baza propoziţiilor 1.3,1.8,1.9 şi 1.4.

1.4 Aplicaţii ale teoremelor de secţiune

Teoremele de secţiune din paragraful precedent au multe aplicaţii în teoria proceselor. Unele dintre cele mai importante sunt teoremele de proiecţie. Vom avea nevoie de cîteva consecinţe imediate ale teoremei 1.4.

Propoziţia 1.16 *Fie x un proces $\mathcal{O}$(respectiv $\mathcal{A}$, respectiv $\mathcal{P}$)− măsurabil. Presupunem*

$$x_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \geq 0,$$

oricare ar fi timpul aleator T (respectiv timpul aletor accesibil , respectiv previzibil). Atunci

$$x_t(\omega) \geq 0$$

pentru orice (ω, t), cu excepţia unei mulţimi evanescente (vezi definţia 1.3).

`Demonstraţie` Intr-adevăr, presupunem prin absurd , că

$$A := \{(\omega, t) \mid x_t(\omega) < 0\}$$

are proiecţia pe Ω de probabilitate strict pozitivă. Atunci , din teoremele de secţiune rezultă că există o opţională (respectiv o opţională accesibilă, respectiv o opţională previzibilă) T, astfel încît

$$[T] \subset A \text{şi } 0 < P(\{T < \infty\})$$

Această opţională are proprietatea că

$$P(\{x_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} < 0\}) = P(\{T < \infty\}) > 0$$

şi s-a ajuns la o contradicţie.

`Comentariu` Concluzia acestei propoziţii poate fi formulată şi sub forma : x este indistinguabil de un proces nenegativ (vezi definiţia 2.10 din [9]0

Corolarul 1.1 *Fie x şi y procese $\mathcal{O}$ (respectiv $\mathcal{A}$, respectiv $\mathcal{P}$)$-$ măsurabile astfel încît*

$$x_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \geq y_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}},$$

oricare ar fi opţionala (respectiv opţionala accesibilă, respectiv opţionala previzibilă) T. Atunci

$$x \geq y,$$

cu excepţia unei mulţimi evanescente.

Corolarul 1.2 *Fie x şi y procese $\mathcal{O}$ (respectiv $\mathcal{A}$, respectiv $\mathcal{P}$)$-$măsurabile, astfel încît*

$$x_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = y_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$$

oricare ar fi opţionala (respectiv opţionala accesibilă, respectiv opţionala previzibilă) T. Atunci

$$x = y$$

cu excepţia unei mulţimi evanescente (sau x şi y sunt indistinguabile).

Propoziţia 1.17 *Fie $V : \Omega \to [0, \infty]$ o funcţie măsurabilă. V este opţională (respectiv opţională accesibilă, respectiv previzibilă), dacă şi numai dacă*

$$[V] \in \mathcal{O} \text{ (respectiv } \mathcal{A}, \text{ respectiv } \mathcal{P})$$

`Demonstraţie` Putem presupune $P(\{V < \infty\}) > 0$. Pentru fiecare n nymăr natural, există o opţională (respectiv opţională accesibilă, respectiv previzibilă) T_n, astfel încît

$$(1)\ [T_n] \subset [V] \text{şi } P(\{V < \infty\}) \leq P(\{T_n < \infty\}) + \frac{1}{n}$$

Din incluziunea de la (1), rezultă

$$(2)\ \{T_n < \infty\} \subset \{V < \infty\} \ \text{ şi } T_n(\omega) < \infty \Rightarrow T_n(\omega) = V(\omega)$$

Putem presupune (T_n) descrescător .

Intr-adevăr, dacă notăm $T_n^{'} = \min(T_1, T_2, ..., T_n)$, observăm că şirul $(T_n^{'})$ are aceleaşi proprietăţi (1) şi (2) ca şi şirul (T_n), în plus este descrescător. Apoi renotăm $T_n^{'}$ cu T_n.

Fie $T = \lim T_n$. T este opţională (respectiv opţională accesibilă, respectiv previzibilă : am aplicat propoziţia 1.4 b)). Făcînd $n \to \infty$ în (1) , se obţine

$$\bigcup_n [T_n] = [T] \subset [V] \ \text{ şi } P(\{V < \infty\}) \leq P(\{T < \infty\}) \ ;$$

din incluziune se vede că , dacă $T(\omega) < \infty \Rightarrow T(\omega) = V(\omega)$, egalitate care dă

$$\{T < \infty\} = \{V < \infty\} = \{T = V\} \text{ a.s.},$$

deci

$$V = T \text{ a.s..}$$

Din propoziţia 1.1 a), rezultă că V este opţională (respectiv accesibilă, respectiv previzibilă). Propoziţia este demonstrată.

Corolarul 1.3 *Dacă $x = (x_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ este un proces adaptat, continuu la dreapta cu limite finite la stînga, există un şir de opţionale cu grafice disjuncte care suportă discontinuităţile lui x. Fiecare dintre aceste opţionale poate fi presupusă fie total inaccesibilă, fie previzibilă.*

`Demonstraţie` Se ştie ([9], propoziţia 3.4) că există un şir de opţionale (T_n) care suportă discontinuităţile lui x, adică :

$$\{(\omega, t) | x_t(\omega) \neq x_{t-}(\omega)\} \subset \bigcup_n [T_n].$$

Definim $S_1, S_2, ..., S_n, ..$variabilele aleatoare aleatoare cu graficele

$$[S_1] = [T_1], [S_2] = [T_2] \setminus [T_1], ..., [S_n] = [T_n] \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} [T_i], ...$$

Din propoziţia 1.16 rezultă că (S_n) este un şir de opţionale, din construcţie se vede că graficele lor sunt disjuncte. Aplicînd teorema 1.1 (de partiţie), există un şir (S'_n) de opţionale accesibile cu grafice disjuncte şi un şir (S''_n) de opţionale total inaccesibile cu grafice disjuncte, astfel încît

$$\{(\omega, t) | x_t(\omega) \neq x_{t-}(\omega)\} \subset \bigcup_n [S'_n] \cup \bigcup_n [S''_n].$$

Din definiţia opţionalei accesibile rezultă că pentru fiecare n , există un şir de previzibile ($S'_{nk})_{k\geq 1}$,astfel încît graficul lui S_n să fie acuperit de graficele acestui şir. Deci

$$[S'_n] \subset \bigcup_k [S'_{nk}],$$

cu excepţia unei mulţimi evanescente şi

$$\{(\omega, t) | x_t(\omega) \neq x_{t-}(\omega)\} \subset \bigcup_n \bigcup_k [S'_{nk}] \cup \bigcup_n [S''_n],$$

cu excepţia unei mulţimi evanescente.

Graficele opţionalelor previzibile pot fi făcute disjuncte exact ca mai sus şi aplicînd din nou propoziţia 1.16 (afirmaţia referitoare la cazul cînd graficul este în $\mathcal{P}$) şi renotînd şirurile de opţionale, propoziţia este demonstrată.

Două procese diferă pe o mulţime evanescentă dacă şi numai dacă sunt indistinguabile, adică traiectoriile lor coincid a.s.(vezi definiţia 2.10 [9]). Relaţia de indistinguabilitate este de echivalenţă şi în continuare vom identifica procesele indistinguabile, iar unicitatea unui proces va trebui înţeleasă pînă la relaţia de indistinguabilitate.

Teorema 1.5 *(teoremele de proiecţie) Fie X un proces măsurabil şi mărginit. Există un proces opţional (respectiv accesibil, respectiv previzibil) unic, ${}^oX$ (respectiv ${}^aX$, respectiv ${}^pX$), astfel încît oricare ar fi opţionala (respectiv opţionala accesibilă, respectiv opţionala previzibilă) T, să avem*

$$\begin{aligned} E(X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_T) &= ({}^oX)_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \ a.s. \\ (\textit{respectiv} E(X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_T) &= ({}^aX)_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \ a.s., \\ \textit{respectiv } E(X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_{T-}) &= ({}^pX)_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \ a.s.) \end{aligned}$$

Procesul ${}^oX$ (respectiv ${}^aX$, respectiv ${}^pX$) se va numi *proiecţia opţională* (respectiv *accesibilă*, respectiv *previzibilă*) a lui X.

`Demonstraţie` Unicitatea rezultă din corolarul 1.2.

Să demonstrăm existenţa. Fie

$$\begin{aligned} &{}^o\mathcal{X}(\text{ respectiv } {}^a\mathcal{X}, \text{ respectiv } {}^p\mathcal{X}) \\ = \ &\{X|X \text{ proces măsurabil, mărginit, pentru care} \\ &\text{există } {}^oX(\text{respectiv}{}^aX, \text{ respectiv}{}^pX\} \end{aligned}$$

Enumerăm mai jos proprietăţile acestor mulţimi. Pentru acele dintre ele care se demonstrează la fel în cele trei cazuri vom folosi notaţiile ${}^i\mathcal{X}$ şi ${}^iX$, cu $i \in \{o, a, p\}$.

1) ${}^i\mathcal{X}$ este nevidă , pentrucă dacă X este un proces constant, ${}^iX = X$.

2) ${}^i\mathcal{X}$ este spaţiu liniar şi

$${}^i(\alpha X + \beta Y) = \alpha({}^iX) + \beta({}^iX),$$

oricare ar fi $X, Y \in {}^i\mathcal{X}$ şi constantele reale α şi β.

3) Dacă $X \in {}^i\mathcal{X}$ şi $X \geq 0 \Rightarrow {}^iX \geq 0$.

4) Dacă $(X^{(n)}) \subset {}^i\mathcal{X}$ este un şir crescător şi $\lim_n X^{(n)} = X$ este mărginit, atunci $X \in {}^i\mathcal{X}$ şi ${}^iX = \lim_n {}^i(X^{(n)})$.

5) Dacă $X \in^i \mathcal{X}$ şi Z este proces $\mathcal{O}$ (respectiv $\mathcal{A}$, respectiv $\mathcal{P}$)− măsurabil şi mărginit, atunci $ZX \in^i \mathcal{X}$ şi ${}^i(ZX) = Z\ ({}^iX)$. In particular ${}^iZ = Z$.

6) Dacă $A \in \mathcal{F}$, atunci $X = \mathbf{1}_{A\times\mathbf{R}_+} \in {}^i\mathcal{X}$ şi dacă $m = (m_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$este un martingal continuu la dreapta cu limite finite la stînga, verificînd $m_t = E(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_t)$ a.s., şi $m^- = (m_{t-})_{t\in\mathbf{R}_+}$, atunci

$${}^oX = m\ ,\ {}^pX = m^-\text{iar } {}^aX = m\mathbf{1}_\mathbf{s} + m^-\mathbf{1}_{\Omega\times\mathbf{R}_+\setminus\mathbf{s}}$$

unde, dacă (T_n) este un şir de opţionale cu grafice disjuncte (vezi corolarul 1.3) care suportă discontinuităţile lui m şi S_n este partea accesibilă a lui T_n(vezi definiţia 1.6), am notat

$$\mathbf{s} := \bigcup_n [S_n]$$

7) Dacă $A \in \mathcal{F}$ şi $t \in \mathbf{R}_+$, atunci $X = \mathbf{1}_{A\times[0,t]} \in {}^i\mathcal{X}$. Dacă notăm cu $\mathbf{0}$ şi T opţionalele identic egale cu 0 şi t, respectiv, avem

$${}^oX = m\mathbf{1}_{[0,\mathbf{T}]}\ ,\ {}^pX = m^-\mathbf{1}_{[0,\mathbf{T}]} \text{ iar } {}^aX = (m\mathbf{1}_\mathbf{s} + m^-\mathbf{1}_{\Omega\times\mathbf{R}_+\setminus\,\mathbf{s}})\mathbf{1}_{[0,\mathbf{T}]}$$

8)

$$^o\mathcal{X}(\text{ respectiv } ^a\mathcal{X}, \text{ respectiv } ^p\mathcal{X}) = \{X \mid X \text{ proces măsurabil mărginit}\}$$

Proprietatea 1) este trivială, iar 2) -4) rezultă din proprietăţile analoage ale valorilor medii condiţionate, din unicitatea demonstrată la început şi din corolarul 1.1.

Pentru a demonstra 5) în cazul $i = o$, să considerăm o opţională T. Din propoziţia 1.14, avem că $Z_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ este $\mathcal{F}_T-$ măsurabilă, deci

$$E(Z_TX_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}|\mathcal{F}_T) = Z_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}E(X_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}|\mathcal{F}_T) = Z_T(^0X)_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$$

Cazul $i = a$ este identic, cu menţiunea că T este accesibilă. Pentru $i = p$, folosim tot propoziţia 1.14 (prima parte).

Să demonstrăm 6). Pentru cazul $i = o$ se observă că din propoziţia 1.13 b) rezultă că m este opţional. Dacă T este o opţională

$$E(\mathbf{1}_{A\times R_+}\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}|\mathcal{F}_T) = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}E(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_T) = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}m_T$$

unde am aplicat teorema de opţionalizare (corolarul 2.18 din [L]). In cazul $i = p$,dacă T este previzibilă şi (T_n) îl anunţă, din propoziţia 1.7 b) avem $\mathcal{F}_{T-} = \sigma(\cup_n\mathcal{F}_{T_n})$. Din teorema martingalelor ascendente (corolarul 2.11 [L]) avem

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{A\times R_+}\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}|\mathcal{F}_{T-}) &= \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}E(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_T) = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\lim_{n\to\infty} E(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_{T_n}) = \\ \lim_{n\to\infty}\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}m_{T_n} &= \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}m_{T-} = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}m_T^- a.s. \end{aligned}$$

Pentru cazul $i = a$, observăm mai întîi că mulţimea $\mathrm{s} \in \mathcal{A}$. Apoi avem

$$m\mathbf{1}_{\mathrm{s}} = \sum_n m_{S_n}\mathbf{1}_{[S_n]}$$

deoarece graficele opţionalelor (S_n) sunt disjuncte. Mai departe $m_{S_n}\mathbf{1}_{[S_n]}$ este proces accesibil : prin raţionamente standard, este suficient să demonstrăm acest lucru pentru $\mathbf{1}_A\ \mathbf{1}_{[S_n]}$,în care $A \in \mathcal{F}_{S_n}$. Intr-adevăr, în acest caz avem

$$\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{[S_n]} = \mathbf{1}_{[S_{nA}]},$$

unde S_{nA} este restricţia lui S_n la A. Din propoziţia 1.8 , rezultă că S_{nA} este tot accesibilă , deci $[S_{nA}] \in \mathcal{A}$. Dacă notăm cu m' membrul drept din definiţia lui ${}^aX$,am demonstrat că m' este proces accesibil. Pentru a termina demonstraţia lui 6) în acest caz, fie T o opţională accesibilă. Deoarece m diferă de m' numai pe graficele părţilor total inaccesibile, R_n, ale opţionalelor T_n, avem

$$\{m_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \neq m'_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\} \subset \bigcup_n \{T = R_n < \infty\}$$

deci, aplicînd propoziţia 1.1 d), se obţine

$$P(\{m_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \neq m'_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\}) = 0.$$

Rezultă

$$E(\mathbf{1}_{A\times R_+} \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_T) = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} m_T = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} m'_T, \ a.s.$$

Proprietatea 7) rezultă din 6) şi din observaţia că intervalul stocastic $[0, T]$ este mulţime previzibilă (deci accesibilă şi opţională).

Proprietatea 8) rezultă din 2), 4) şi 7) prin raţionamente standard.

Teorema este demonstrată.

Exerciţiu

Dacă X este proces măsurabil mărginit, ${}^0X$ (respectiv ${}^aX$,respectiv ${}^pX$) este caracterizat de următoarea proprietate : este proces opţional (respectiv accesibil, respectiv previzibil) şi

$$\int ({}^oX)_T dP = \int X_T dP$$

oricare ar fi opţionala (respectiv opţionala accesibilă, respectiv opţionala previzibilă) T.

Definiţia 1.11 *Dacă X este proces $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)-$măsurabil şi mărginit definim*

$$\pi^o(X) = {}^oX \ (\textit{ respectiv } \pi^a(X) = {}^aX, \textit{ respectiv } \pi^p(X) = {}^pX)$$

şi o numim proiecţia opţională (respectiv accesibilă , respectiv previzibilă)

Corolarul 1.4 *Aplicaţia $\pi^i(i = o, a, p)$ are următoarele proprietăţi:*

1) este liniară

2) este pozitivă

3) dacă $(X^{(n)})$ este un şir crescător de procese măsurabile mărginite, cu limita mărginită, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \pi^i(X^{(n)}) = \pi^i(\lim_{n\to\infty} X^{(n)})$$

4) Are loc egalitatea

$$\pi^i(ZX) = Z\pi^i(X),$$

oricare ar fi Z şi X măsurabile mărginite, cu Z opţional dacă $i = o$,accesibil dacă $i = a$ şi previzibil, dacă $i = p$.

5) Dacă

$$X_s(\omega) = g(\omega)\mathbf{1}_{[0,t]}(s),$$

unde $t \geq 0$ şi g este o v.a. mărginită, atunci

$$(\pi^o x)_s(\omega) = m_s(\omega)\mathbf{1}_{[0,t]}(s) \text{şi } (\pi^p x)_s(\omega) = m_{s-}(\omega)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$$

şi, unde m este un proces comtinuu la dreapta cu limite finite la stînga verificînd $m_s = E(g|\mathcal{F}_s)$ a.s., pentru orice $s \geq 0$.

`Demonstraţie` Primele patru puncte sunt conţinute în demonstraţia teoremei 1.5.Demonstraţia lui 5) se face prin raţionamente standard,folosind 1)$-$4) şi faptul că din aceeaşi teoremă rezultă că 5) este adevărată pentru g funcţie indicator a unei mulţimi din $\mathcal{F}$.

Capitolul 2

Procese cu variaţie mărginită

2.1 Descompunerile Jordan şi Lebesgue

Se va presupune că ($\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, t \in [0, \infty)$) este un cîmp de probabilitate filtrat cu o filtraţie verificînd condiţiile uzuale. In acest capitol vom considera doar procese continue la dreapta cu limite finite la stînga (cadlag, în [10, 11, 12], sau RCLL în [5,7,13]). Dacă X este un astfel de proces, vom nota cu ΔX procesul salturilor lui X,adică

$$\Delta X_t(\omega) = X_t(\omega) - X_{t-}(\omega), t \in \mathbf{R}_+, \omega \in \Omega.$$

Ca deobicei, vom identifica procesele indistinguabile. In ipoteza că X şi Y sunt cadlag, este suficient ca $X_t = Y_t$, pentru orice t a.s., pentru ca să avem $X = Y$.

Următorele exerciţii de funcţii reale de variabilă reală sunt indispensabile pentru studiul proceselor cu variaţie mărginită.

Exerciţiu

Fie funcţia $f : T \to \mathbf{R}$. Presupunem că T este un interval al axei reale. De cele mai multe ori $T = \mathbf{R}_+$.

Fie $[a, b]$ un interval inclus în T şi

$$d = \{(x_i)_{i=0,1,\dots,n} | a = x_o < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

o diviziune a lui $[a, b]$. Notăm

$$V_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

Variaţia lui f de la a la b se defineşte prin

$$V_a^b(f) := \sup\{V_d(f) \mid d \text{ diviziune a lui } [a,b]\}$$

Au loc următoarele proprietăţi :

1)$0 \leq V_a^b(f) \leq \infty, V_a^b(f) = 0 \Leftrightarrow f$ constant pe $[a,b]$,sau $a = b$.

2)$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$,unde $g : T \to \mathbf{R}$.

3)$V_c^d(f) \leq V_a^b(f)$,dacă $[c,d] \subset [a,b]$

4)$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$, dacă $a \leq c \leq b$

5) $|f(b) - f(a)| \leq V_a^b(f)$, $|f(b) - f(a)| = V_a^b(f) \Leftrightarrow f$ este monotonă pe $[a,b]$

Definiţia 2.1 *Spunem că f este cu variaţie mărginită pe $[a,b]$ dacă $V_a^b(f) < \infty$,şi spunem că f este cu variaţie finită dacă oricare ar fi $[a,b] \subset T, f$ este cu variaţie mărginită pe $[a,b]$.*

6) Funcţiile cu variaţie marginită pe $[a,b]$ (respectiv, cu variaţie finită), formează spaţiu vectorial.

In continuare vom presupune $T = [a,b]$, sau $T = [a,\infty)$(în particular $T = [0,\infty)$) şi f cu variaţie finită .

Funcţia $x \to V_a^x f : T \to \mathbf{R}_+$ se numeşte *variaţia lui f* (valoarea acestei funcţii în x este variaţia de la a la x a lui f)

Variaţia lui f are următoarele proprietăţi :

7) este crescătoare

8) este continuă la dreapta (respectiv, la stînga) în orice punct în care f este continuă la dreapta (respectiv, la stînga)

9) $V_a^{x+0}f - V_a^x f = |f(x+0) - f(x)|$, $V_a^x f - V_a^{x-0} f = |f(x) - f(x-0)|$

10) Definim

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{V_a^x(f) + |f(a)| + f(x)}{2} \\ P(x) &= \frac{V_a^x(f) + |f(a)| - f(x)}{2} \end{aligned}$$

a) Funcţiile N şi P sunt nenegative, crescătoare, n-au salturi în comun : N preia salturile (la stînga sau la dreapta) pozitive ale lui f, P preia salturile negative ale lui f(cu semn schimbat), iar $N(a) = f^+(a)$ şi $P(a) = f^-(a)$.

b) Au loc egalităţile

$$f = N - P,\ V_a f + |f(a)| = N + P$$

Presupunem a fixat şi introducem următoarea notaţie

$$|f|(x) = V_a^x f + |f(a)|$$

şi o numim *variaţia de la* $a - 0$ *la* x a lui f (această denumire se justifică presupunînd $f(x) = 0$, pentru $x < a$). Deşi notaţia variaţiei lui f prin $|f|$, poate fi confundată cu funcţia modul aplicată lui f, pe ultima o vom folosi doar aplicată unui punct, deci sub forma $|f(x)|$,iar $|f|(x)$ înseamnă variaţia lui f calculată în x (cînd este pericol de confuzie vom face precizări).

Proprietăţile $7) - 9)$ ale lui $V_a f$ sunt valabile şi pentru $|f|$.

Cu această notaţie, egalităţile de la b) se numesc *descompunerea Jordan* a lui f. Funcţiile N şi P sunt nenegative, crescătoare, şi sunt unicele funcţii de acest tip care satisfac

$$f = N - P$$

şi

$$|f| = N + P$$

c) Dacă $f = N_1 - P_1$ este altă reprezentare a lui f ca diferenţa două funcţii crescătoare, cu $N_1(a) = f^+(a)$ şi $P_1(a) = f^-(a)$, atunci $N \leq N_1$ şi $P \leq P_1$.Această proprietate este alt mod de caracterizare a descompunerii Jordan.

Continuăm cu alte proprietăţi ale lui f.

11) Are discontinuităţi doar de prima specie (are limite laterale finite în fiecare punct)

12) Salturile lui f , care în modul sunt mai mari ca $\varepsilon > 0$, nu au puncte de acumulare la distanţă finită.

13) Funcţia f are o mulţime de discontinuităţi cel mult numărabilă.

14) La acest punct vom construi un exemplu de funcţie cu variaţie finită pe T.

Fie (x_n) un şir de puncte în T şi (u_n) un şir de numere reale cu

$$\sum_n |u_n| < \infty.$$

Fie

$$s(x) = \sum_{\{n | x_n \leq x\}} u_n$$

Funcţia $s : T \to \mathbf{R}$ are următoarele proprietăţi:

a) Este continuă la dreapta, continuă în orice $x \neq x_n$, are discontinuităţi de prima specie şi $s(x_n) - s(x_n - 0) = u_n$,pentru orice n.

b) Are loc egalitatea

$$s(x) = \sum_{\{u|a \le u \le x\}} \Delta s(u)$$

c) Funcţia s are variaţie finită şi

$$|s|(x) = \sum_{\{n|x_n \le x\}} |u_n| = \sum_{\{u|a \le u \le x\}} |\Delta s(u)|$$

15) Fie $f : T \to \mathbf{R}$ o funcţie cu variaţie finită continuă la dreapta şi fie (x_n) un şir de puncte din T în care f are discontinuităţi. Notăm $u_n = f(x_n) - f(x_n - 0)$. Presupunem că dacă $f(a) \neq 0, x_0 = a$, iar $u_0 = f(a)$. Definim

$$s(x) = \sum_{\{n|x_n \le x\}} u_n \text{şi } \varphi(x) = f(x) - s(x), \text{ pentru orice } x \in T.$$

Funcţia φ este continuă, cu variaţie finită, şi

$$f = \varphi + s \text{ unde } s(x) = \sum_{\{u|a \le u \le x\}} |\Delta f(u)|$$

se numeşte *descompunerea Lebesgue a lui* f.

16) Presupunem că funcţia f este nenegativă şi crescătoare. Să se arate că φ este cea mai mare funcţie continuă, nulă în a, care minorează pe f.

17) Fie f o funcţie cu variaţie finită pe $[a, \infty)$ şi

$$f(x) = \varphi(x) + s(x),\ x \in [a, \infty)$$

descompunerea ei Lebesgues. Atunci

$$|f|(x) = |\varphi|(x) + |s|(x),\ x \in [a, \infty)$$

este descompunerea Lebesgue a lui $|f|$.

18) Fie f o funcţie cu variaţie finită, continuă la dreapta definită pe $\mathbf{R}_+$ şi μ_f măsura Lebesgue Stieltjes asociată ei (unica măsură pe $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ care verifică $\mu_f([0, t]) = f(t)$). Să se arate că, dacă

$$f = N - P$$

este descompunerea Jordan a lui f, atunci

$$\mu_f = \mu_N - \mu_P$$

este descompunerea Jordan a lui μ_f, deci

$$\mu_N + \mu_P = |\mu_f|,$$

şi

$$|\mu_f| = \mu_{|f|}$$

adică variaţia lui μ_f este măsura Stieltjes asociată lui $|f|$.

Cu aceasta, încheiem lista de proprietăţi de ale funcţiilor cu variaţie finită necesare pentru studiul proceselor cu variaţie finită.

Dacă $A = (A_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ este un proces cu traiectorii continue la dreapta şi cu variaţie finită , dacă $t \in \mathbf{R}_+$ şi

$$t_i^{(n)} = \frac{t}{2^n} i, \text{unde } i = 0, 1, ..., 2^n (\{t_i^{(n)} | i = 0, ..., 2^n\}$$

este partiţia diadică a intervalului $[0, t]$), definim

$$(1)\ |A|_t(\omega) = |A_0(\omega)| + \sup_n \sum_{i=0}^{2^n-1} |A_{t_{i+1}^{(n)}} - A_{t_i^{(n)}}|$$

Datorită continuităţii la dreapta a traiectoriei ω a lui A, se verifică faptul că supremumul din membrul drept este chiar variaţia acestei traiectorii de la $0-0$ la t, fapt care justifică folosirea aceleiaşi notaţii ca în exerciţiul de mai sus.

Procesul $|A| = (|A|_t)$ este crescător, continuu la dreapta, cu

$$(2)\ |A|_t - |A|_{t-} = |A_t - A_{t-}|$$

Dacă A este adaptat, din (1) se vede că $|A|$ este adaptat. Funcţia $|A|_\infty = \lim_{t\to\infty} |A|_t$ se numeşte *variaţia totală* a lui A. Se observă că

$$(3)\ |A|_\infty = |A_0| + \sup_n \sum_{i=0} |A_{t_{i+1}^{(n)}} - A_{t_i^{(n)}}|,\ t_i^{(n)} = i2^{-n},\ i = 0, 1, 2, ...$$

Definiţia 2.2 *Dacă*

$$\int |A|_\infty dP < \infty$$

vom spune că A are variaţie integrabilă.

Dacă A are variaţie integrabilă, aproape toate traiectoriile lui au variaţie finită şi datorită convenţiei de identificare a proceselor indistinguabile, se poate presupune că toate traiectoriile au variaţie finită.

Definiţia 2.3 *Procesele adaptate, continue la dreapta, cu variaţie finită (respectiv integrabilă) se vor numi procese VF (respectiv, procese VI). Dacă A este proces VI, vom nota*

$$||A||_v = \int |A|_\infty dP$$

şi

$$\mathcal{V}_{\mathcal{I}} = \{A|A \text{ proces } VI\} \quad \text{şi} \quad \mathcal{V} = \{A|A \text{ proces } VF\}$$

Mulţimea proceselor VI(respectiv, VF) formează spaţiu vectorial şi funcţia $A \to ||A||_v : \mathcal{V}_{\mathcal{I}} \to \mathbf{R}_+$ este o normă.

Fie $A \in \mathcal{V}$ şi fie

$$B_t = \frac{1}{2}(|A|_t + A_t), \; C_t = \frac{1}{2}(|A|_t - A_t)$$

Procesele $B = (B_t)$ şi $C = (C_t)$ sunt nenegative, crescătoare şi avem

$$(4) \; A_t = B_t - C_t \text{şi } |A|_t = B_t + C_t.$$

Relaţiile (4) se vor numi *descompunerea Jordan* a lui A. Pentru fiecare ω fixat, descompunerea (4) este descompunerea Jordan a traiectoriei ω a lui A (vezi exerciţiu pag 35). Dacă A este VI , atunci $B_\infty = \lim_{t\to\infty} B_t$ şi $C_\infty = \lim_{t\to\infty} C_t$ sunt integrabile, deci B şi C sunt VI .

Fie A un proces VF şi $\varepsilon > 0$. Pentru $\omega \in \Omega$, să definim

$$T(\omega) = \inf\{t \mid |A_t(\omega) - A_{t-}(\omega)| > \varepsilon\}$$

Funcţia T este opţională, iar procesul

$$(\omega, t) \to \Delta A_T(\omega)\mathbf{1}_{[T,\infty)}(\omega, t) = \Delta A_T(\omega)\mathbf{1}_{\{T\le t\}}(\omega)$$

este adaptat. Considerăm acum procesul

$$A_t - \Delta A_T \mathbf{1}_{\{T\le t\}}$$

El este diferenţa a două procese VF, deci este VF. Ii aplicăm aceeaşi operaţie ca mai sus, ş.a.m.d. In acest mod eliminăm din A toate salturile $> \varepsilon$. Facem apoi $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$. Construim în acest mod un şir (T_n) de opţionale cu grafice disjuncte, astfel încît procesul VF

$$A_t^c := A_t - \sum_n \Delta A_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n\le t\}}$$

rămîne continuu. Am obţinut următoarea reprezentare pentru A :

$$(5)\ A_t = A_t^c + A_t^d,\ \text{unde}\ A_t^d = \sum_n \Delta A_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n \le t\}} = \sum_{u \le t} \Delta A_u$$

Reprezentarea (5) se numeşte *descompunerea Lebesgue* a lui A. Pentru fiecare ω fixat, (5) dă descompunerea Lebesgue a traiectoriei ω a lui A (vezi exerciţiul de la pag. 35) . A^c se numeşte componenta continuă a lui A, iar A^d se numeşte componenta pur discontinuă (variază doar prin salturi) a lui A

Din exerciţiul de la pagina 35, rezultă că

$$(6)\ |A|_t = |A^c|_t + \sum_n |\Delta A_{T_n}| \mathbf{1}_{\{T_n \le t\}} = |A^c|_t + \sum_{u \le t} |\Delta A_u|$$

iar $|A^c| = |A|^c$ şi $|A^d| = |A|^d$, adică (6) este descompunerea Lebesgue a lui $|A|$.

Propoziţia 2.1 *Dacă A este proces VF (respectiv,VI) şi este previzibil, atunci $|A|$ şi componentele lui A din descompunerea Jordan sunt previzibile.*

`Demonstraţie` Fie $\varepsilon > 0$ şi

$$M = \{(\omega, t) \mid |A_t(\omega) - A_{t-}(\omega)\ | \ge \varepsilon\}$$

Această mulţime este previzibilă. Dacă T este prima intrare în M, atunci $[T] \subset M$ şi $[T] = M \setminus (T, \infty)$, de unde rezultă că $[T]$ este previzibilă, ca diferenţă între două mulţimi previzibile. Deci T este opţională previzibilă (propoziţia 1.16). Deoarece A este previzibil, ΔA_T este $\mathcal{F}_{T-}-$ măsurabilă (propoziţia 1.14), prin raţionamente standard se verifică faptul că

$$|\Delta A_T| \mathbf{1}_{[T, \infty)}$$

este previzibil. In descompunerea Lebesgue de la (6) , toate procesele din membrul drept sunt previzibile. Rezultă că $|A|$ este previzibil. Mai departe, componentele din descompunerea Jordan a lui A de la (4) sunt previzibile şi demonstraţia este încheiată.

2.2 Dezintegrarea măsurilor

Din nou ($\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, t \in \mathbf{R}_+$) este un cîmp de probabilitate filtrat verificînd condiţiile uzuale (vezi începutul cap.1).

Fie A un proces continuu la dreapta cu variaţie integrabilă (definiţia 2.2). Dacă X este un proces măsurabil mărginit, definim

$$PA(X) = \int (\int X_t(\omega) dA_t(\omega)) dP(\omega)$$

In integrala din interior integrandul este secţiunea ω a lui X, iar măsura integratoare este măsura Stieltjes generată de traiectoria

$$t \to A_t(\omega) : [0, \infty) \to \mathbf{R}$$

a lui A, presupunînd $A_{0-} = 0$. Această măsură este o măsură vectorială (cu valori în $\mathbf{R}$, sau măsură cu semn). Prin raţionamente standard se arată că integrala din interior este o funcţie măsurabilă , mărginită de

$$\sup_{t,\omega} |X_t(\omega)||A|_\infty$$

care este $P-$integrabilă. Deci PA se poate considera o măsură vectorială definită pe $\sigma-$ algebra mulţimilor măsurabile $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$, nulă pe mulţimile evanescente (definiţia 1.3).

Teorema următoare arată că măsurile nule pe mulţimile evanescente sunt doar de acest tip. Dar mai întîi dăm următoarea propoziţie :

Propoziţia 2.2 *Fie A şi B procese continue la dreapta cu variaţie integrabilă. Atunci*

$$PA = PB \Leftrightarrow A = B$$

`Demonstraţie` Numai " $\Rightarrow$ " este netrivială. Fie

$$X = \mathbf{1}_{F\times[0,t]}$$

unde $t \in \mathbf{R}_+$ şi $F \in \mathcal{F}$. Avem

$$\begin{aligned} \int_F A_t dP &= \int (\int \mathbf{1}_{F\times[0,t]}(\omega, s) dA_s(\omega)) dP(\omega) = \\ &= PA(F \times [0,t]) = PB(F \times [0,t]) = \int_F B_t dP \end{aligned}$$

Rezultă $A_t = B_t$, a.s , oricare ar fi t şi folosind continuitatea la dreapta a traiectoriilor lui A şi B, rezultă $A = B$ (pînă la relaţia de indistinguabilitate)

Teorema 2.1 *Fie $\mu : \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \to \mathbf{R}$ o măsură (cu semn) nulă pe mulţimile evanescente. Atunci există un unic proces A, continuu la dreapta cu variaţie integrabilă , astfel încît $\mu = PA$. Dacă $|\mu|$ este variaţia lui μ, atunci* $|\mu| = P|A|$

`Demonstraţie` Unicitatea este propoziţia anterioară.

Pentru a demonstra existenţa, vom presupune mai întîi $\mu \geq 0$.Pentru $t \geq 0$ fixat şi $F \in \mathcal{F}$, fie

$$\mu_t(F) := \mu(F \times [0,t]).$$

Funcţia μ_t este măsură absolut continuă de P,pentrucă μ se anulează pe evanescente. Fie Φ_t o versiune a derivatei Radon-Nicodym a lui μ_t în raport cu P. Are loc relaţia

$$\mu(F \times [0,t]) = \int_F \Phi_t dP$$

pentru orice $F \in \mathcal{F}$. Din monotonia lui μ ca funcţie de mulţime, rezultă că $t \leq s \Rightarrow \Phi_t \leq \Phi_s$ a.s. Fie

$$A_t(\omega) = \inf\{\Phi_r(\omega) \mid r > t, r \text{ raţional}\}$$

Să demonstrăm că $A_t = \Phi_t$,a.s. Din inegalitatea $\Phi_r \geq \Phi_t$ a.s.,pentru orice $r > t$, rezultă $A_t \geq \Phi_t$,a.s. Pe de altă parte, dacă (r_n) este un şir de raţionale care descreşte la t, avem $A_t = \lim_{n\to\infty} \Phi_{r_n}$, a.s., şi din teorema convergenţei dominate şi a proprietăţilor lui μ se obţine

$$\begin{aligned}\int A_t dP &= \lim_{n\to\infty} \int \Phi_{r_n} dP = \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega \times [0, r_n]) \\ &= \mu(\Omega \times [0.t]) = \int \Phi_t dP,\end{aligned}$$

deci $A_t = \Phi_t$,a.s.

Procesul $A = (A_t)$ este crescător, nenegativ, continuu la dreapta, şi avem

$$\mu(F \times [0,t]) = \int_F \Phi_t dP = \int (\int \mathbf{1}_{F\times[0,t]} dA_t) d = PA(F \times [0,t])$$

pentru orice $t \geq 0$ şi $F \in \mathcal{F}$. Rezultă

$$\int A_\infty dP = \lim_{t\to\infty} \int A_t dP = \lim_{t\to\infty} \mu(\Omega \times [0,t]) = \mu(\Omega \times [0,\infty)) < \infty,$$

adică A_∞ este integrabilă şi $\mu = PA$, deorece coincid pe o mulţime de generatori ai lui $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ stabilă la intersecţii finite, care conţine pe $\Omega \times \mathbf{R}_+$.

Să presupunem că μ este cu semn şi că $\mu = \mu^+ - \mu^-$ este descompunerea Jordan a lui μ. Măsurile μ^+ şi μ^- se anulează pe mulţimile evanescente (din proprietăţile descompunerii Jordan, sau din faptul că $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ se mai poate caracteriza astfel : dacă $M \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$

$$\begin{aligned} (1)\ |\mu|(M) &= \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(M_i)|\ |M = \bigcup_{i=1}^{i=n} M_i, M_i \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+), \\ M_i \cap M_j &= \Phi, i \neq j, i, j = 1, 2, ..., n, n = 1, 2, ..\}) \end{aligned}$$

Fie B şi C procesele construite în prima parte a demonstraţiei care au proprietatea că $\mu^+ = PB$ şi $\mu^- = PC$. Fie $A = B - C$. Procesul A este continuu la dreapta, $|A| \leq |B| + |C| = B + C$, şi $|A|_\infty \leq B_\infty + C_\infty$, Deci ţinînd seama de prima parte a demonstraţiei, A are variaţia integrabilă. Avem

$$\mu = \mu^+ - \mu^- = PB - PC = P(B - C) = PA$$

şi

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^- = PB + PC = P(B + C)$$

iar

$$P|A| \leq |\mu|$$

Pe de altă parte

$$|PA(M)| = \left| \int \int \mathbf{1}_M dA dP \right| \leq \int | \int \mathbf{1}_M dA| dP \leq \int \int \mathbf{1}_M d|A| dP = P|A|(M)$$

şi din (1) rezultă $|\mu|(M) \leq P|A|(M)$, pentru orice $M \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$,deci

$$P|A| = |\mu| = |PA|$$

Teorema este demonstrată.

In continuare vom răspunde la următoarea întrebare: cînd procesul A din teorema de mai sus, are proprietăţi suplimentare de măsurabilitate, mai precis , este opţional sau chiar previzibil.

Teorema 2.2 *Fie A un proces continuu la dreapta, cu variaţie integrabilă. Atunci A este opţional, dacă şi numai dacă*

$$PA = PA \circ \pi^o,$$

unde π^o este proiecţia opţională.

`Demonstraţie` Proiecţia opţională are proprietăţi care fac membrul drept măsură pe $\sigma-$ algebra mulţimilor măsurabile (corolarul 1.4).

Să demonstrăm implicaţia"numai dacă". Va fi suficient să arătăm că cele două măsuri coincid pe prucese de forma $x = \mathbf{1}_{F\times[0,t]}$ unde $F \in \mathcal{F}$ şi $t \geq 0$. Se ştie (teorema 1.5) că $\pi^o x = m\mathbf{1}_{\Omega\times[0,t]}$ unde $m = (m_s)$ este mrtingalul cadlag ce verifică pentru orice $s \geq 0$, $m_s = E(\mathbf{1}_F|\mathcal{F}_s)$ $a.s.$ Avem

$$\begin{aligned} PA(\pi^o x) &= \int\int m_s(\omega)\mathbf{1}_{\Omega\times[0,t]}(\omega,s)dA_s(\omega)dP(\omega) = \\ \int\int_{[0,t]} m_s(\omega)dA_s(\omega)dP(\omega) &= \int m_0A_0dP + \int\int_{(0,t]} m_s dA_s dP \end{aligned}$$

Pe de altă parte, dacă

$$t_i^{(n)} = i\frac{t}{n}$$

pentru $i = 0, 1, ..., n$, avem

$$\begin{aligned} PA(x) &= \int_F A_t dP = \sum_{i=0}^{n-1}\int_F (A_{t_{i+1}^{(n)}} - A_{t_i^{(n)}})dP + \\ + \int_F A_0 dP &= \sum_{i=0}^{n-1}\int E(\mathbf{1}_F(A_{t_{i+1}^{(n)}} - A_{t_i^{(n)}})|\mathcal{F}_{t_{i+1}^{(n)}})dP + \\ + \int E(\mathbf{1}_F A_0|\mathcal{F}_0)dP &= \sum_{i=0}^{n-1}\int (A_{t_{i+1}^{(n)}} - A_{t_i^{(n)}})E(\mathbf{1}_F|\mathcal{F}_{t_{i+1}^{(n)}})dP + \\ + \int A_0 E(\mathbf{1}_F|\mathcal{F}_0)dP &= \sum_{i=0}^{n-1}\int (A_{t_{i+1}^{(n)}} - A_{t_i^{(n)}})m_{t_{i+1}^{(n)}}dP + \int A_0 m_0 dP = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\int\int_{(t_i^{(n)},\, t_{i+1}^{(n)}]} m_{t_{i+1}^{(n)}} dA_s dP + \int A_0 m_0 dP \end{aligned}$$

Avem

$$PA(\pi^o x - x) = \int H_n(\omega, s)dA_s dP(\omega)$$

unde

$$H_n(\omega, s) = \sum_{i=0}^{n-1}(m_s(\omega) - m_{t_{i+1}^{(n)}}(\omega))\mathbf{1}_{(t_i^{(n)},\, t_{i+1}^{(n)}]}(s)$$

Din continuitatea la dreapta a traiectoriilor lui m, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\omega, s) = 0 \text{ , pentru orice } \omega \text{şi } t$$

şi convergenţa este dominată. Implicaţia este demonstrată aplicînd de două ori terema convergenţei dominate.

Implicaţia inversă se bazează pe următoarea lemă cu caracter general.

Lema 2.1 *Dacă f este o v.a. integrabilă pe $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ şi $\mathcal{G}$ o sub$-\sigma-$ algebră a lui $\mathcal{F}$, atunci f este $\mathcal{G}-$ măsurabilă dacă şi numai dacă*

$$\int fgdP = 0, \text{ oricare ar fi } g, \text{ v.a.mărginită, cu } E(g|\mathcal{G}) = 0$$

`Demonstraţie` Numai implicaţia "dacă" este netrivială. Intr-adevăr, dacă $B \in \mathcal{F}$ avem

$$\begin{aligned}\int_B (f - E(f\ |\mathcal{G}))dP &= \int \mathbf{1}_B f dP - \int \mathbf{1}_B E(f|\mathcal{G})dP = \\ \int \mathbf{1}_B f dP - \int E(\mathbf{1}_B|\mathcal{G})\ fdP &= \int (\mathbf{1}_B - E(\mathbf{1}_B|\mathcal{G}))\ fdP = 0\end{aligned}$$

deoarece, $g := \mathbf{1}_B - E(\mathbf{1}_B|\mathcal{G})$ este mărginită şi $E(g|\mathcal{G}) = 0$. Mulţimea B este arbitară în $\mathcal{F}$, deci $f - E(f\ |\mathcal{G}) = 0$,a.s.

Vom reveni acum la demonstraţia implicaţiei "$\Leftarrow$" din teoremă.

Deoarece A este continuu la dreapta şi are limite finite la stînga fiindcă este proces cu variaţie finită, va fi suficient să demonstrăm că este adaptat (propoziţia 1.13 b)). Aplicăm lema de mai sus. Fie g o v.a. mărginită cu $E(g|\mathcal{F}_t) = 0$. Avem

$$\begin{aligned}\int gA_t dP &= \int\int g\mathbf{1}_{[0,t]} dA_s dP = PA(g\mathbf{1}_{[0,t]}) = \\ &= PA(\pi^o(g\mathbf{1}_{[0,t]}) = PA(m\mathbf{1}_{\Omega\times[0,t]})\end{aligned}$$

unde $m_s = E(g|\mathcal{F}_s)$ a.s. Dar pentru $s \le t$,avem

$$m_s = E(m_t|\mathcal{F}_s) = E(E(g|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = 0,$$

datorită ipotezei impuse lui g.

Teorema este demonstrată.

Teorema 2.3 *Fie A un proces continuu la dreapta cu variaţie integrabilă. Sunt echivalente următoarele proprietăţi :*

1) A este previzibil

2) $PA = PA \circ \pi^p$, unde π^p este proiecţia previzibilă.

3) A are următoarele proprietăţi :

a) A_T este $\mathcal{F}_{T-}-$ măsurabilă, oricare ar fi opţionala T previzibilă.

b) dacă T este total inaccesibilă,

$$P(\{A_T \neq A_{T-}\}) = 0$$

`Demonstraţie` 2) $\Rightarrow$ 3) Fie T o opţională previzibilă. Pentru a demonstra că A_T este $\mathcal{F}_{T-}-$măsurabilă, vom aplica lema 2.1.Fie g o v.a. mărginită cu $E(g|\mathcal{F}_{T-}) = 0$.Avem

$$\int gA_T dP = PA(g\mathbf{1}_{[0,T]}) = PA(\pi^p(g\mathbf{1}_{[0,T]}))$$

Dacă $m = (m_s)$ este un martingal cadlag ce verifică $m_s = E(g|\mathcal{F}_s)$ a.s. pentru orice s,atunci

$$\pi^p(g\mathbf{1}_{[0,T]})(\omega, s) = m_{s-}(\omega)\mathbf{1}_{[0,T]}(\omega, s).$$

Pentru a aplica lema mai trebuie să arătăm că integrala de mai sus este nulă.Va fi suficient ca

$$m_s(\omega)\mathbf{1}_{[0,T)}(\omega, s) = 0.$$

Intr-adevăr, dacă (S_n) este un şir ce-l anunţă pe T (definiţia 1.1), vom avea $[0,T) = \cup_n[0, S_n]$ şi va fi suficient să arătăm că

$$m_s(\omega)\mathbf{1}_{[0,S_n]}(\omega, s) = 0$$

Dar

$$m_s(\omega)\mathbf{1}_{[0,S_n]}(\omega, s) = m_s(\omega)\mathbf{1}_{\{s\leq S_n\}} = m_{\min(s,S_n)}\mathbf{1}_{\{s\leq S_n\}} =$$
$$= E(g|\mathcal{F}_{\min(s,S_n)})\mathbf{1}_{\{s\leq S_n\}} = E(E(g|)|\mathcal{F}_{\min(s,S_n)})\mathbf{1}_{\{s\leq S_n\}} = 0$$

In a treia din egalităţile de mai sus, am folosit teorema de opţionalizare 2.11 din [9] şi în ultima am folosit incluziunea

$$\mathcal{F}_{\min(s,S_n)} \subset \mathcal{F}_{T-}$$

care rezultă din propoziţia 1.6 b).

Să observăm că din a) rezultă în particular şi că A este adaptat.

b) Fie T o opţionala total inaccesibilă. Avem

$$\int (A_T - A_{T-})dP = PA(\mathbf{1}_{[T]}) = PA(\pi^p(\mathbf{1}_{[T]}))$$

ultima egalitate fiind adevărată din ipoteză. Dar

$$\pi^p(\mathbf{1}_{[T]}) = 0$$

pentrucă oricare ar fi opţionala previzibilă S avem

$$\mathbf{1}_{[T]}(\omega, S(\omega)) = \mathbf{1}_{\{T=S<\infty\}}(\omega) = 0 \text{ a.s.}$$

şi ţinem seama de definiţia proiecţiei previzibile din Teorema 1.5. Deci

$$\int (A_T - A_{T-})dP = 0.$$

Dacă $B \in \mathcal{F}_T$,

$$\int_B (A_T - A_{T-})dP = \int (A_{T_B} - A_{T_B-})dP = 0$$

ultima fiind adevărată pentrucă T_B este total inaccesibilă (propoziţia 1.8 a)). Va rezulta $A_T - A_{T-} = 0$,a.s.

3) $\Rightarrow$ 1).Fie

$$A = A^c + A^d$$

descompunerea Lebesgue a lui A(formula (5) pag. 41). Avem

$$A_t^d = \sum_n \Delta A_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n \le t\}}$$

unde graficele opţionalelor T_n sunt disjuncte două cîte două. Deci

$$\{(\omega, t) \mid A_t(\omega) \neq A_{t-}(\omega)\} \subset \bigcup_n [T_n]$$

Din Corolarul 1.3 rezultă că opţionalele T_n pot fi sau previzibile sau total inaccesibile. Din ipoteza b) rezultă că T_n pot fi doar previzibile. Dar ΔA_{T_n} este $\mathcal{F}_{T_n-}-$ măsurabilă (ipoteza a)) şi această proprietate implică, în baza propoziţiei 1.10 şi a unor raţionamente standard, că procesul

$$\Delta A_{T_n}(.)\mathbf{1}_{\{T_n \le t\}}(.) = \Delta A_{T_n}(.)\mathbf{1}_{[T_n,\infty)}(., t)$$

este previzibil. Rezultă că A^d este previzibil. Componenta A^c este proces continuu, deci previzibil. In final obţinem A previzibil.

1) $\Rightarrow$ 2) Folosind propoziţia 2.1 ne putem restrînge la cazul A crescător , cu $A_0 \geq 0$. Mai departe, folosind descompunerea Lebesgue a lui A, putem trata separat cazurile :

i) $A = \Phi \mathbf{1}_{[T,\infty)}$, cu T previzibilă şi Φ v.a. măsurabilă $\mathcal{F}_{T-}$.

ii) A proces VI continuu.

Fie x un proces măsurabil mărginit. In cazul i) avem

$$\begin{aligned} PA(x) &= \int \int x_t dA_t dP = \int x_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \Phi dP = \\ \int E(x_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \Phi | \mathcal{F}_{T-}) dP &= \int \Phi E(x_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_{T-}) dP \end{aligned}$$

Din definiţia proiecţiei previzibile a lui x (teorema 1.5) avem

$$E(x_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_{T-}) = (\pi^p x)_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$$

deci

$$PA(x) = \int \Phi (\pi^p x)_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} dP = \int \int (\pi^p x)_t dA_t dP = PA(\pi^p x)$$

In cazul ii) vom avea nevoie de următoarea lemă de funcţii reale de variabilă reală.

Lema 2.2 *Fie $a : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ o funcţie crescătoare, continuă la dreapta, cu $a(\infty) := \lim_{t\to\infty} a(t) < \infty$. Fie $t \in \mathbf{R}_+$ şi*

$$c(t) := \inf\{s \mid a(s) \geq t\}$$

Funcţia c este crescătoare, continuă la stînga, şi pentru orice $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, boreliană şi mărginită, are loc egalitatea

$$\int_0^{a(\infty)} f(c(t)) dt = \int_0^\infty f(t) da(t)$$

`Demonstraţie` Vom arăta mai întîi că c este continuă la stînga.

Intr-adevăr, dacă există $t \in \mathbf{R}_+$,cu $c(t-0) < c(t)$ şi alegem h cu $c(t-0) < h < c(t)$,rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, avem $c(t-\varepsilon) < h < c(t)$ şi $a(h) \geq t-\varepsilon$, de unde $a(h) \geq t$. Pe de altă parte, din inegalitatea $h < c(t)$ rezultă $a(h) < t$ şi s-a obţinut o contradicţie.

Funcţia $c : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este finită pe $[0, a(\infty)]$ şi pentru $t > a(\infty)$ avem $c(t) = \infty$. Aplicînd o formulă de transport,

$$\int_{[0,a(\infty)]} f(c(t))d\lambda(t) = \int_{[0,\infty)} f(u)d(\lambda \circ c^{-1})$$

unde c^{-1} este aplicaţia preimagine asociată lui c şi λ este măsura Lebesgue pe dreaptă. Să observăm că

$$\begin{aligned} \lambda \circ c^{-1}([0, u]) &= \lambda(\{s | c(s) \leq u\}) = \\ &= \lambda(\{s | s \leq a(u)\}) = \lambda([0, a(u)) = \lambda(u) \end{aligned}$$

şi lema este demonstrată.

Revenim la demonstraţia teoremei înn cazul ii). Fie

$$C_s(\omega) = \inf\{t \mid A_t(\omega) \geq s\}$$

C_s sunt opţionale previzibile, deoarece graficul lor

$$[C_s] = \{(\omega, t) \mid A_t(\omega) \geq s\} \backslash (C_s, \infty)$$

este o mulţime previzibilă (mulţimea descăzut din membrul drept este previzibilă pentrucă A este continuu, deci $\mathcal{P}-$măsurabil). In calculele de mai jos se va folosi lema 2.2.

$$\begin{aligned} PA(x) &= \int (\int_0^\infty x_s(\omega)dA_s(\omega))dP(\omega) = \int (\int_o^{A_\infty} x(\omega, C_s(\omega))ds)dP(\omega) \\ &= \int \int_0^\infty x_{C_s} \mathbf{1}_{\{C_s < \infty\}} ds dP = \int_0^\infty ds (\int x_{C_s} \mathbf{1}_{\{C_s < \infty\}} dP) \end{aligned}$$

Din definiţia proiecţiei previzibile avem

$$\int x_{C_s} \mathbf{1}_{\{C_s < \infty\}} dP = \int (\pi^p x)_{C_s} \mathbf{1}_{\{C_s < \infty\}} dP.$$

deci

$$PA(x) = \int_0^\infty ds (\int (\pi^p x)_{C_s} \mathbf{1}_{\{C_s < \infty\}} dP) = PA(\pi^p x)$$

Corolarul 2.1 *Fie μ o măsură care nu încarcă mulţimile evanescente. Presupunem că $\mu = \mu \circ \pi^o$(respectiv, $\mu = \mu \circ \pi^p$). Atunci există un proces A, continuu la dreapta, cu variaţie integrabilă, opţional (respectiv, previzibil) unic, astfel încît*

$$\mu = PA.$$

`Demonstraţie` Se aplică teoremele 2.1, 2.2 , 2.3.

Definiţia 2.4 *Se spune că măsura $\mu : \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+) \to \mathbf{R}$, comută cu proiecţia opţională (respectiv, previzibilă), dacă $\mu = \mu \circ \pi^o$(respectiv, $\mu = \mu \circ \pi^p$)*

Corolarul 2.2 *Dacă μ comută cu π^o(respectiv, π^p), atunci $|\mu|, \mu^+, \mu^-$ comută cu π^o(respectiv, π^p).*

`Demonstraţie` Din ipoteză, rezultă că μ nu încarcă mulţimile evanescente. Aplicînd corolarul anterior, rezultă că există A opţional (respectiv, previzibil) astfel încît $\mu = PA$. Din teorema 2.1 , avem $|\mu| = P|A|$ şi $|A|$ este opţional (respectiv , previzibil din propoziţia 2.1) Din teorema 2.2 (respectiv 2.3) rezultă că $|\mu|$ comută cu π^o(respectiv, π^p). Din

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(\mu + |\mu|)\text{şi } \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

rezultă, aceeaşi proprietate pentru μ^+ şi μ^-.

Următorul corolar completează propoziţia 2.2.

Corolarul 2.3 *Fie A şi B procese continue la dreapta, cu variaţie integrabilă, opţionale (respectiv, previzibile). Atunci $A = B \Leftrightarrow PA \circ \pi^o = PB \circ \pi^o$(respectiv, $PA \circ \pi^p = PB \circ \pi^p$) $\Leftrightarrow PA|_{\mathcal{O}} = PB|_{\mathcal{O}}$ (respectiv, $PA|_{\mathcal{P}} = PB|_{\mathcal{P}}$)*

($PA|_{\mathcal{O}}$ este restricţia lui PA la $\mathcal{O}$, etc)

2.3 Compensarea proceselor VI

Reamintim că procesele VI sunt procese continue la dreapta, adaptate (deci opţionale) cu variaţie integrabilă (definiţia 2.2).

Propoziţia 2.3 *Fie A un proces VI. Atunci*

$$PA \circ \pi^p = 0 \Leftrightarrow A \text{ martingal cu } A_0 = 0$$

Demonstraţie Dacă $PA \circ \pi^p = 0$, din propoziţia 1.12 c) rezultă că

$$PA((s_F, t_F]) = 0,$$

sau

$$(1) \int_F A_s dP = \int_F A_t dP,$$

pentru orice $F \in \mathcal{F}_s$ şi $t > s > 0$ (s_F este restricţia opţionalei identic egale cu s, la F, etc). Deci A este martingal.

Dacă $F \in \mathcal{F}_0$,rezultă ,

$$(2)\ PA([0_F]) = 0 \text{ , sau } \int_F A_0 dP = 0$$

de unde rezultă că $A_0 = 0$, a.s.

Reciproc, dacă A este martingal nul în origine, relaţiile (1) şi (2) sunt satifăcute. Dar (1) înseamnă

$$PA(F \times (s, t]) = 0,$$

oricare ar fi $t > s > 0$ şi $F \in \mathcal{F}_s$ şi (2) înseamnă

$$PA(F \times \{0\}) = 0,$$

oricare ar fi $F \in \mathcal{F}_0$. Rezultă că PA se anulează pe o mulţime de generatori ai lui $\mathcal{P}$ (vezi exerciţiul 1.1) închisă la intersecţii finite, deci $PA \circ \pi^p = 0$.

Corolarul 2.4 *Un martingal A,nul în origină şi proces VI previzibil, este nul. In particular, un martingal nul în origină şi proces VI continuu, este nul.*

Demonstraţie Din propoziţia precedentă avem $PA \circ \pi^p = 0$. Din corolarul 2.3 se obţine $A \equiv 0$.

Teorema 2.4 *Fie A proces VI. Există o descompunere unică*

$$A = \tilde{A} +^c A$$

în care $\tilde{A}$ şi ${}^cA$ sunt procese VI, $\tilde{A}$ este previzibil şi ${}^cA$ este martingal nul în origină.

`Demonstraţie` Se construieşte măsura $\mu = PA \circ \pi^p$, care comută cu proiecţia previzibilă şi i se poate aplica corolarul 2.1. Există un (unic) proces previzibil $\tilde{A}$, astfel încît $PA \circ \pi^p = P\tilde{A}$. Fie ${}^cA = A - \tilde{A}$. Evident, $P({}^cA) \circ \pi^p = 0$. Din propoziţia 2.3 rezultă că ${}^cA$ este martingal nul în origine.

Observăm că dacă B este alt proces VI şi α, β sunt constante nenegative, avem $P(\alpha A+\beta B)\circ\pi^p = P(\alpha\tilde{A}+\beta\tilde{B})$. In aceste comdiţii, pentru a demonstra unicitatea este suficient să presupunem că

$$0 = \tilde{A} + {}^cA$$

şi să arătăm că fiecare termen din membrul drept al acestei egalităţi este nul. Intr-adevăr, ${}^cA$ este proces VI, martingal nul în origine şi egalitatea ${}^cA = -\tilde{A}$ arată că este şi previzibil. Din corolarul 2.4 rezultă ${}^cA = 0$, deci şi $\tilde{A} = 0$.

Definiţia 2.5 *Fie A proces VI. Procesul $\tilde{A}$(unic) din teorema 2.4 se numeşte proiecţia previzibilă duală a lui A sau compensatorul lui A, iar $A-\tilde{A} = {}^cA$ se numeşte compensatul lui A.*

Corolarul 2.5 *Dacă A este proces VI, proiecţie previzibilă duală $\tilde{A}$ se caracterizează în următoarele două moduri:*

a) unicul proces VI previzibil, cu

$$PA \circ \pi^p = P\tilde{A}$$

b) unicul proces VI previzibil cu proprietatea că $A - \tilde{A}$ este martingal nul în zero.

Observaţia 2.1 *Dacă A este proces VI, aplicaţia $A \to {}^cA$ este liniară.*

Observaţia 2.2 *Dacă A este proces VI, avem*

$${}^cA = {}^c(A - A_0),$$

deoarece compensatul unui proces constant , egal cu A_0, este procesul nul.

Corolarul 2.6 *Fie A un proces VI şi $A = A^c + A^d$ descompunerea Lebesgue a lui A. Au loc următoarele relaţii:*

$${}^cA = {}^c(A^d) \quad \text{şi } \tilde{A} = A^c + \widetilde{(A^d)}$$

`Demonstraţie` Din faptul că $PA^c \circ \pi^p = PA^c$ (teorema 2.3) şi din corolarul anterior, rezultă

$$(A^c)^{\sim} = A^c \text{ , deci } {}^c(A^c) = 0$$

Trecînd la procese compensate în descompunerea Lebesgue, din liniaritate, se obţine prima relaţie din corolar. A doua relaţie se obţine trecînd la compensator în descompunerea Lebesgue.

Teorema următoare dă structura proceselor VI care sunt martingale.

Teorema 2.5 *Fie M un proces VI. Atunci M este martingal, dacă şi numai dacă*

$$M_t = M_0 +^c \Big(\sum_{0<s\leq t} \Delta M_s \Big)$$

In acest caz avem

$$(M^d)^{\sim} = M_0 - M^c,$$

deci proiecţia previzibilă duală a lui M^d este continuă.

`Demonstraţie` Mai întîi observăm că dacă procesul M este martingal, descompunerea din teorema 2.4 este

$$(3)\ M = M_o + (M - M_0)$$

Deci, $M - M_0 = {}^cM$ şi aplicînd corolarul anterior

$$M - M_0 = {}^c(M^d),$$

relaţie care scrisă la momentul t dă prima din relaţiile din teoremă. Inegalitatea strictă $s > 0$, din enunţ, poate fi înlocuită de cea nestrictă (observaţia 2.2)

Reciproc, dacă un proces VI, M, are expresia din teoremă, atunci M este martingal, deoarece compensatul oricărui proces VI este martingal.

A doua relaţie din enunţ este a doua relaţie din corolarul 2.6, aplicată lui $\tilde{M}$. Intr-adevăr, folosind şi (3) avem

$$M_0 = \tilde{M} = M^c + (M^d)^{\sim}$$

Propoziţia 2.4 *Dacă M este un martingal VI şi N este un martingal mărginit, atunci*

$$(M_tN_t - \sum_{s\le t} \Delta M_s \Delta N_s, \mathcal{F}_t, t \geqq 0)$$

este martingal uniform integrabil, nul în origine. In particular

$$(4) \int M_\infty N_\infty dP = \int (\sum_{s\ge 0} \Delta M_s \Delta N_s) dP$$

Demonstraţie Mai întîi să observăm că în aprope fiecare $\omega \in \Omega$, seria de mai sus este absolut convergentă, sumele ei parţiale fiind dominate de

$$|M|_\infty(\omega) 2 \sup_{(\omega,t)} |N_t(\omega)| < \infty \text{ a.s.}$$

Vom demonstra mai întîi (4). Aplicînd teoremele 2.2 şi 1.5, avem

$$\begin{aligned} \int N_\infty M_\infty dP &= PM(N_\infty \mathbf{1}_{[0,\infty)}) \\ &= PM(\pi^o(N_\infty \mathbf{1}_{[0,\infty)})) = \int \int_{[0,\infty)} N_t dM_t dP \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} \int \int_{[0,\infty)} N_t dM_t dP &= \int \int_{[0,\infty)} (N_t - N_{t-}) dM_t dP + \\ + \int \int_{[0,\infty)} N_{t-} dM_t dP &= \int (\sum_{t\ge 0} \Delta N_t \Delta M_t) + PM(\pi^p(N)) \end{aligned}$$

Să observăm că

$$PM(\pi^p(N)) = P(M - M_0)(\pi^p(N)) + \int N_{0-} M_0 dP = 0,$$

deoarece martingalului VI, nul în origine, $M - M_0$, i se poate aplica propoziţia 2.3., iar $N_{0-} \equiv 0$.

Pentru a demonstra prima parte a propoziţiei, fie T o opţională şi N^T stopatul lui N la momentul T, adică $N^T = (N_{\min(t,T)})_{t\geqq 0}$. Aplicînd lui N^T egalitatea demonstrată mai sus, se obţine

$$\int M_\infty N_T dP = \int (\sum_{s\ge 0} \Delta M_s \Delta N_s^T) dP$$

sau

$$\int M_T N_T dP = \int (\sum_{s \leq T} \Delta M_s \Delta N_s) dP.$$

Fie

$$K_t := M_t N_t - \sum_{s \leq t} \Delta M_s \Delta N_s$$

Procesul $(K_t)_{t\in[0,\infty]}$ este adaptat şi are proprietatea că oricare ar fi opţionala T, K_T este integrabilă şi

$$\int K_T dP = 0$$

Lema de mai jos încheie demonstraţia.

Lema 2.3 *Fie $K = (K_t)_{t\in[0,\infty]}$ un proces adaptat cu proprietatea că oricare ar fi opţionala T, K_T este integrabilă şi*

$$\int K_T dP = c$$

unde c este o constantă. Atunci K este martingal.

`Demonstraţie` Fie $s < t$ şi $A \in \mathcal{F}_s$. Fie s_A restricţia opţionalei identic egale cu s la A (definiţia 1.5) . Avem

$$\begin{aligned}\int_A K_s &= \int K_{s_A} dP - \int_{\Omega\setminus A} K_\infty dP = \\ &= \int K_{t_A} dP - \int_{\Omega\setminus A} K_\infty dP = \int_A K_t\end{aligned}$$

In încheierea acestui paragraf vom da două exemple de martingale VI. Aceste exemple vor fi reluate în penultimul paragraf al acestui capitol.

Teorema 2.6 *Fie T o opţională şi f o v.a. integrabilă, măsurabilă în raport cu $\mathcal{F}_T$ şi astfel încît $\{T = \infty\} \subset \{f = 0\}$. Considerăm procesul VI*

$$A_t = f\ \mathbf{1}_{\{T\leq t\}}$$

a) Presupunem că T este total inaccesibilă. Atunci ${}^cA$ este continuu cu excepţia graficului lui T iar $\Delta({}^cA)_T = f$. Dacă $f \in L_2(\mathcal{F}_T)$, rezultă $({}^cA)_\infty \in L_2(\mathcal{F})$.

b) Presupunem T previzibilă şi $P(\{T > 0\}) = 1$. Dacă

$$\int fgdP = 0$$

oricare ar fi g mărginită şi $\mathcal{F}_{T-}$– măsurabilă (în particular, dacă $f \in L_2(\mathcal{F}_T) \ominus L_2(\mathcal{F}_{T-})$), atunci $A \equiv {}^cA$.

Demonstraţie a) Prima parte a acestui punct este echivalentă cu continuitatea lui $\tilde{A}$. Fie $\varepsilon > 0$ şi

$$S(\omega) = \inf\{t > 0|\ |\tilde{A}_t(\omega) - \tilde{A}_{t-}(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

Opţionala S este previzibilă (vezi demonstraţia propoziţiei 2.1) şi

$$\int (\tilde{A}_S - \tilde{A}_{S-})P = P\tilde{A}([S]) = PA([S])$$

Dar

$$PA([S]) = \int (A_S - A_{S-})dP = P(\{S = T < \infty\}) = 0$$

pentrucă T este total inaccesibilă şi S este previzibilă. Deasemenea, dacă $F \in \mathcal{F}_{S-}$,avem

$$\int_F (\tilde{A}_S - \tilde{A}_{S-})P = \int (\tilde{A}_{S_F} - \tilde{A}_{S_F-})P = 0$$

deoarece S_F este previzibilă (propoziţia 1.8 b)). Dar $(\tilde{A}_S - \tilde{A}_{S-})$ este $\mathcal{F}_{S-}$– măsurabilă (teorema 2.3) şi rezultă $\tilde{A}_S = \tilde{A}_{S-}$ a.s., deci $S = \infty$ a.s. şi cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, $\tilde{A}$ nu are salturi, deci este continuu.

Să arătăm că $\tilde{A}_\infty$ este de pătrat integrabil. Va fi suficient să arătăm că există o constantă $c > 0$,astfel încît, pentru orice v.a. h mărginită, să avem

$$|\int h\tilde{A}_\infty dP| \leq c||h||$$

(deoarece v.a. mărginite sunt dense în L_2 în topologia lui L_2 şi L_2 este autoadjunct). Intr-adevăr,

$$\begin{aligned} |\int h\tilde{A}_\infty dP| &= |P\tilde{A}(h\mathbf{1}_{\Omega\times\mathbf{R}_+})| = |PA(\pi^p(h\mathbf{1}_{\Omega\times\mathbf{R}_+}))| \\ &= |\int\int m_{t-}(\omega)dA_t(\omega)dP(\omega)| \end{aligned}$$

unde $(m_t)_{t\geq 0}$ un proces continuu la dreapta cu limite finite la stînga, verificînd pentru orice $t, m_t = E(h|\mathcal{F}_t)$ a.s. Majorînd modulul integralei de mai sus, se obţine

$$|\int h\tilde{A}_\infty dP| \leq \int \sup_t |m_t(\omega)|A_\infty(\omega)|dP(\omega) \leq ||\sup_t |m_t(\omega)||| \; || A_\infty||$$

Din inegalitatea normelor a lui Doob ([9] teorema 2.9), rezultă

$$||\sup_t |m_t(\omega)||| \leq 2\sup_t ||m_t||$$

Se obţine

$$|\int h\tilde{A}_\infty dP| \leq 2\sup_t ||m_t|| \; || A_\infty|| \leq 2||h|| \; || A_\infty|| = 2||h|| \; ||f||$$

b) Va fi suficient să arătăm că A este martingal nul în origine (în baza unicităţii descompunerii din teorema 2.4) sau că

$$E(f|\mathcal{F}_t) = f\mathbf{1}_{\{T\leq t\}},$$

pentru orice $t \geq 0$. Intr-adevăr, dacă $B \in \mathcal{F}_t$ avem

$$\int_B f dP = \int_B f\mathbf{1}_{\{T\leq t\}} dP + \int f\mathbf{1}_{\{T>t\}\cap B} dP$$

Dar $B \cap \{t < T\} \in \mathcal{F}_{T-}$(propoziţia 1.5 a)) şi ultima integrală de mai sus este nulă, în baza ipotezei făcute asupra lui f.

Teorema este demonstrată

Observaţia 2.3 *Cînd $f \geq 0$, $\tilde{A}$ este crescător.*

2.4 Descompunerea Doob-Meyer

Fie un cîmp de probabilitate filtrat $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, t \in [0, \infty))$ ce satisface condiţiile uzuale (vezi cap1, §1).

Definiţia 2.6 *Se numeşte potenţial, un supermartingal $p = (p_t)_{t\in[0,\infty)}$ continuu la dreapta, nenegativ satisfăcînd condiţia*

$$\lim_{t\to\infty} \int p_t dP = 0.$$

Fiind supermartingal pozitiv, $\min(p_t, 0) = 0$ pentru orice t şi aplicînd o teoremă de convergenţă pentru supermartingale (corolarul 2.4 din [L]), există $\lim_{t\to\infty} p_t := p_\infty$ a.s şi din lema lui Fatou $p_\infty = 0$,deci $\lim_{t\to\infty} p_t := 0$, a.s şi în L_1.

Definiţia 2.7 *Un potenţial p este de clasă D, dacă oricare ar fi şirul crescător de opţionale (T_n), cu $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$, rezultă*

$$\lim_{n\to\infty} \int p_{T_n} dP = 0$$

Propoziţia 2.5 *Potenţialul p este de clasă D, dacă şi numai dacă familia de funcţii $\{p_T \mid T$ opţională$\}$este uniform integrabilă.*

Demonstraţie Implicaţia "dacă" rezultă din faptul că dacă $T_n \to \infty$,rezultă $p_{T_n} \to 0$ a.s. Dar şirul (p_{T_n}) este format din funcţii uniform integrabile.Va rezulta în baza criteriului Lebesgue (varianta mai tare a teoremei convergenţei dominate, [9] teorema 2.6), că $p_{T_n} \to 0$ în L_1.

Reciproc, să presupunem că p este de clasă D şi să arătăm că

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\{p_T > \alpha\}} p_T dP = 0$$

uniform în raport cu T. Fie $\sigma_n(\omega) = \inf\{t \mid p_t(\omega) > n\}$. Funcţia σ_n este opţională şi $\sigma_n \leq \sigma_{n+1}$.Din continuitatea la dreapta a traiectoriilor lui p,şi existenţa a.s. a limitelor la stînga finite ale lui p (vezi [9] teorema 2.5) rezultă că şirul (σ_n) nu poate avea puncte de acumulare la distanţă finită, şi $\sigma_n \to \infty$ a.s. cînd $n \to \infty$.

Fie $T'(\omega) = T(\omega)$, dacă $p_T(\omega) > n$ şi $T'(\omega) = \infty$, în caz contrar. Avem $T' \geq \sigma_n$

$$\int_{\{p_T > n\}} p_T dP = \int p_{T'} dP \leq \int p_{\sigma_n} dP,$$

ultima inegalitate fiind adevărată datorită teoremei de opţionalizare. Rezultă

$$\sup_T \int_{\{p_{T>n}\}} p_T dP \leq \int p_{\sigma_n} dP$$

de unde

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\{p_{T>\alpha}\}} p_T dP = 0$$

uniform în T.

Demonstraţia este încheiată.

In continuare vom asocia unui potenţial de clasă D o măsură pe $\sigma-$ algebra mulţimilor previzibile, $\mathcal{P}$.

Fie

$$\mathcal{J} = \{[0_B] \cup \bigcup_{i=1}^{n} (S_i, T_i] \mid B \in \mathcal{F}_0, S_i, T_i, i = 1, ..., n \text{ opţionale}, n \geq 1\}$$

Se verifică prin raţionamente standard că aceasta este o algebră şi că intervalele stocastice din această definiţie se pot presupune disjuncte două cîte două . S-a arătat că $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{P}$ (propoziţia 1.13). Fie p un potenţial şi $A \in \mathcal{J}$ de forma

$$(1)\ A = [0_B] \cup \bigcup_{i=1}^{n} (S_i, T_i]$$

Introducem funcţia de mulţime

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{n} \int (p_{S_i} - p_{T_i}) dP$$

Se verifică că definiţia este corectă. Funcţia μ este pozitivă şi finit aditivă.

Teorema 2.7 *Dacă p este de clasă (D), funcţia μ este măsură.*

Demonstraţia se va baza pe următoara lemă. In această lemă vom folosi notaţia

$$\bar{A} = [0_B] \cup \bigcup_{i=1}^{n} [S_i, T_i]$$

dacă A are expresia (1) de mai sus.

Lema 2.4 *Dacă $H \in \mathcal{J}$, şi $\varepsilon > 0$,există $K \in \mathcal{J}$ astfel încît $\bar{K} \subset H$ şi $\mu(H \backslash K) < \varepsilon$.*

`Demonstraţia lemei`.Se poate presupune $H = (S, T]$.

Fie

$$S_n = \min(S + \frac{1}{n}, T)$$

.Avem $S_n \to S$ şi

$$\mu((S, T] \backslash (S_n, T]) = \mu((S, S_n]) = \int (p_S - p_{S_n}) dP.$$

Sirul (p_{S_n}) este uniform integrabil şi tinde a.s. la p_S. Aplicînd criteriul lui Lebesgue, avem

$$\lim_{n\to\infty} \mu((S, S_n]) = \lim_{n\to\infty} \int (p_S - p_{S_n})dP = 0,$$

deci există un număr natural $k = k(\varepsilon)$,astfel încît , notînd $K = (S_k, T]$

$$\mu(H \backslash K) = \mu((S, S_k]) < \varepsilon.$$

Rămîne de demonstrat că se poate presupune

$$\bar{K} = [S_k, T] \subset H.$$

Aceasta înseamnă că pentru orice ω, să fie adevărată următoarea incluziune de secţiuni

$$(\bar{K})_\omega \subset H_\omega,$$

adică următoarea incluziune de intervale pe dreaptă :

$$[S_k(\omega), T(\omega)] \subset (S(\omega), T(\omega)]$$

Aceasta este evident dacă $S(\omega) < T(\omega)$, sau $S(\omega) = T(\omega) = \infty$. Dacă $S(\omega) = T(\omega) < \infty$,avem

$$(\bar{K})_\omega = \{S(\omega)\} \text{şi } H_\omega = \Phi.$$

deci incluziunea nu mai are loc.Totuşi, se poate face ca aceste puncte ω să nu mai existe, înlocuind pe S cu $S_{\{S<T\}}$ şi pe T cu $T_{\{S<T\}}$ şi observînd că prin această înlocuire H nu se schimbă.

`Demonstraţia teoremei` Fie (H_n) un şir descrescător de mulţimi din $\mathcal{J}$ cu intersecţia vidă. Vom arăta că

$$\lim_{n\to\infty} \mu(H_n) = 0$$

Fie $\varepsilon > 0$. Din lema de mai sus, pentru fiecare n, există un $K_n \in \mathcal{J}$ cu $\bar{K}_n \subset H_n$, astfel încît

$$\mu(H_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Fie

$$L_n = \bigcap_{i=1}^{n} K_i.$$

Avem $L_n \in \mathcal{J}$, şi $\bar{L}_n \subset \bar{K}_n \subset H_n$ şi

$$\mu(H_n - L_n) = \mu(H_n - \bigcap_{i=1}^{n} K_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i - K_i) < \varepsilon$$

deci

$$\mu(H_n) \leq \mu(L_n) + \varepsilon.$$

Va fi suficient să demonstrăm că

$$\lim_{n\to\infty} \mu(L_n) = 0$$

Fie T_n prima intrare în L_n. Avem

$$L_n \subset (T_n, \infty), \text{ deci } \mu(L_n) \leq \mu((T_n, \infty)) = \int p_{T_n} dP$$

Deoarece, p este de clasă D, dacă vom arăta că $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$, demonstraţia va fi încheiată.

Intr-adevăr, pentru fiecare ω,secţionînd prin ω mulţimea H_n,avem

$$\bigcap_n (H_n)_\omega = (\bigcap_n H_n)_\omega = \Phi$$

dar

$$\bigcap_n (\bar{L}_n)_\omega \subset \bigcap_n (H_n)_\omega$$

deci

$$\bigcap_n (\bar{L}_n)_\omega = \Phi$$

Mulţimile acestei intersecţii sunt descrescătoare şi compacte pe axa reală. Din faptul că intersecţia lor este vidă, rezultă că există un număr natural $n(\omega)$, astfel încît

$$(\bar{L}_{n(\omega)})_\omega = \Phi.$$

va rezulta că

$$T_{n(\omega)}(\omega) = \infty$$

Deci şirul $T_n(\omega)$ tinde la ∞ chiar cu stabilizare.

Definiţia 2.8 *Un supermartingal x continuu la dreapta se numeşte de clasă D, dacă familia de funcţii*

$$\{x_T \mid T \text{ opţională}\}$$

este uniform integrabilă.

Observaţia 2.4 *Definiţia este corectă.*

`Demonstraţie` Deoarece în particular,

$$\{x_t | t \in \mathbf{R}_+\}$$

este uniform integrabilă, rezultă ([9],teorema 2.8 a)) că există $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x_t$ a.s. şi în L_1 , deci în definiţia de mai sus x_T are sens şi acolo unde $T = \infty$.

Teorema 2.8 *(descompunerea Doob-Meyer a supermartingalelor) Fie x un supermartingal de clasă D. Există un unic proces crescător A , continuu la dreapta , cu $A_0 = 0$ şi A_∞ integrabil, previzibil , astfel încît pentru orice $t \geq 0$, să avem*

$$x_t = M_t - A_t, a.s.$$

unde $M = (M_t)_{t\geq 0}$ este martingal uniform integrabil.

`Demonstraţie` Unicitatea. Presupunem că pentru orice $t \geq 0$ avem

$$M_t - A_t = M'_t - A'_t, a.s.$$

unde A' şi M' au aceleaşi proprietăţi ca A şi respectiv M, din enunţ. Rezultă că

$$M_t - M'_t = A_t - A'_t, a.s.$$

deci $M - M'$ este un martingal VI, previzibil şi nul în origine, deci este nul în baza corolarului 2.4.

Existenţa. Fie $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x_t$ a.s. şi în L_1(vezi observaţia 2.3). Avem pentru orice $t \geq 0$,

$$x_t = (x_t - E(x_\infty|\mathcal{F}_t)) + E(x_\infty|\mathcal{F}_t) \text{ a.s.}$$

Procesul

$$p_t := x_t - E(x_\infty|\mathcal{F}_t)$$

este supermartingal nenegativ, continuu la dreapta, iar martingalul continuu la dreapta şi uniform integrabil $m = (m_t)_{t\geq 0}$,verificînd $m_t = E(x_\infty|\mathcal{F}_t)$ a.s. ([9],teorema 2.10) are proprietatea că

$$\lim_{t\to\infty} m_t = E(x_\infty|\mathcal{F}_\infty) = x_\infty, \text{a.s. şi în } L_1$$

([9],teorema 2.8 b)). Va rezulta că $p = (p_t)_{t\geq 0}$ este potenţial de clasă D. Ultima afirmaţie e o consecinţă a faptului că p este diferenţa a două supermartingale de clasă D : x,prin ipoteză şi m din teorema de opţionalizare 2.18 şi propoziţia 2.9 din [2].

Fie μ măsura asociată lui p prin teorem 2.7. Măsura $\mu \circ \pi^p$ extinde pe μ pe $\sigma-$ algebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ şi va fi notată tot cu μ. Măsura μ comută cu proiecţia previzibilă. Aplicîndu-i corolarul 2.1, rezultă că există A proces previzibil VI, astfel încît $\mu = PA$.

Procesul A are $A_0 = 0$ a.s. şi pentrucă μ este măsură (pozitivă) , A este crescător. Avem pentru $t \geq 0$

$$\int p_t dP = \mu(\Omega \times (t,\infty)) = PA(\mathbf{1}_{(\mathbf{t},\infty)}) = \int (A_\infty - A_t) dP$$

în care $\mathbf{1}_{(\mathbf{t},\infty)}$=$\Omega \times (t,\infty)$. Repetînd acelaşi raţionament în care opţionala identic egala cu t, notată cu $\mathbf{t}$, se înlocuieşte cu opţionala t_F egală cu t pe $F \in \mathcal{F}_t$ şi cu ∞ înafara lui F, se obţine

$$\int_F p_t dP = \int_F (A_\infty - A_t) dP$$

unde F este arbitrar în $\mathcal{F}_t$. Va rezulta

$$p_t = E(A_\infty|\mathcal{F}_t) - A_t \text{ a.s.}$$

Corolarul 2.7 *Supermartingalul $x = (x_t)_{t\geq 0}$ este de clasa D, dacă şi numai dacă*

$$x_t = M_t - A_t$$

unde (M_t) este martingal continuu la dreapta, uniform integrabil şi (A_t) este proces continuu la dreapta, crescător, cu $A_0 = 0$ a.s. şi $A_\infty = \lim_{t\to\infty} A_t$ integrabil.

`Demonstratie` Numai implicaţia "dacă" mai trebuie demonstrată. Martingalul (M_t) este de clasă D (aceeaşi justificare ca şi în demonstraţia de mai sus) iar $(-A_t)$ este dominat în modul de v.a. A_∞ integrabilă, deci este tot de clasă D.

Definiţia 2.9 *Procesul A (unic) din descompunerea Doob-Meyer a unui supermartingal de clasă D, se va numi procesul crescător natural asociat supermartingalului.*

In incheierea acestui paragraf, vom raspunde la următoarea problemă : cînd procesul crescător natural asociat unui supermartingal de clasă D este continuu?

Definiţia 2.10 *Un supermartingal x de clasă D se numeşte regulat , dacă pentru orice şir crescător de opţinale (T_n) cu $T_n \to T$, avem*

$$\lim_{n\to\infty} \int x_{T_n} dP = \int x_T dP$$

Teorema 2.9 *Fie x un supermartingal de clasă D. Procesul crescător natural asociat este continuu dacă şi numai dacă x este regulat.*

`Demonstraţie` Fie

$$p_t = x_t - E(x_\infty|\mathcal{F}_t).$$

Procesul $p = (p_t)_{t\geq 0}$ este potenţial de clasă (D) care este regulat (deoarece diferă de x printr-un martingal uniform integrabil). Procesul crescător natural asociat lui x este cel asociat lui p, deci este suficient să demonstrăm teorema pentru p.

Fie A procesul natural asociat lui p (teorema 2.8). Se ştie că A nu încarcă opţionalele total inaccesibile (teorema 2.3). Deci (corolarul 1.3), există un şir de previzibile (T_n), astfel încît

$$\{(\omega, t)|A_t(\omega) \neq A_{t-}(\omega)\} \subset \bigcup_n [T_n]$$

Dacă notăm cu S oricare din opţionalele şirului de mai sus şi cu (S_n) un şir care o anunţă, acest şir urcă la S şi

$$\{S > 0\} \subset \bigcap_n \{S_n < S\} \text{ a.s.}$$

deci

$$\int (A_S - A_{S-})dP = \int (A_S - \lim_{n\to\infty} A_{S_n})dP = \lim_{n\to\infty} \int (A_s - A_{S_n})dP =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int (p_{S_n} - p_S) dP = \lim_{n\to\infty} \int p_{S_n} dP - \int p_S dP = 0$$

Am folosit faptul că A îl generează pe p în a treia din egalităţile de mai sus. Deci $P(\{A_S \neq A_{S-}\}) = 0$ Dacă definim

$$\Lambda := \bigcup_n \{A_{T_n} \neq A_{T_n-}\})$$

avem $P(\Lambda) = 0$ şi pentru orice $\omega \notin \Lambda$, taiectoria $t \to A_t(\omega)$ este continuă.

Reciproc , dacă A este a.s. continuu şi (S_n) este un şir crescător de opţionale cu $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \int p_{S_n} dP - \int p_S dP = \lim_{n\to\infty} \int (p_{S_n} - p_S) dP =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int (A_s - A_{S_n}) dP = \int A_S dP - \lim_{n\to\infty} \int A_{S_n} dP = 0$$

Teorema este demonstrată.

2.5 Integrala stocastică Stieltjes

Fie A un proces continuu la dreapta cu variaţie totală $|A|_\infty$integrabilă. Procesul $|A|$ este şi el continuu la dreapta. (se aplică exerciţiul de la pag 36). Fie H un proces măsurabil. Presupunem $P|A|(|H|) < \infty$, adică

$$(1) \int \int |H_t(\omega)| d|A|_t(\omega) dP(\omega) < \infty$$

Definiţia 2.11 *Se numeşte integrală stocastică a lui H în raport cu A şi se notează cu $H.A$, procesul definit prin*

$$(2)\ (H.A)_t(\omega) = \int_{[0,t]} H_s(\omega) dA_s(\omega)$$

Din ipoteza (1) rezultă existenţa lui (2).

Proprietăţile imediate ale aplicaţiei $H \to H.A$ sunt enumerate în propoziţia următoare:

Propoziţia 2.6 *a)* $(H.A)_0 = H_0A_0$

b) $H.A$ *este continuu la dreapta şi are variaţia totală integrabilă.*

c) pentru orice $s \geq 0$,

$$(H.A)_s - (H.A)_{s-} = H_s(A_s - A_{s-}) \text{ sau } \Delta(H.A)_s = H_s\Delta A_s \text{ a.s.}$$

d) Dacă A *este adaptat şi* H *este progresiv măsurabil (în particular opţional), rezultă că* $H.A$ *este opţional.*

e) Dacă A *este crescător şi pozitiv şi* $H \geq 0$, *rezultă că* $H.A$ *este crescător şi pozitiv.*

f) $(H+K).A = H.A + K.A$, *unde* K *are aceleaşi proprietăţi ca şi* H.

g) $(\alpha H).A = \alpha(H.A)$ *petru orice* $\alpha \in \mathbf{R}$

h) Dacă K *este proces măsurabil şi mărginit, rezultă că* KH *este măsurabil şi* $(P|A|)(|KH|) < \infty$ *şi*

$$K.(H.A) = (KH).A$$

i) Dacă A *este crescător şi pozitiv şi dacă* $0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n \leq \ldots$ *şi* $H = \lim_{n\to\infty} H_n$ *este integrabil în raport cu* PA, *atunci* $(H_n.A)$ *este crescător şi* $lim_{n\to\infty} H_n.A = H.A$

j) $P(H.A) = H(PA)$

Demonstraţie Punctul a) rezultă din definiţia (2). Continuitatea la dreapta rezultă tot din (2), pe baza proprietăţilor integralei Stieltjes. Ultima parte a lui b) rezultă din

$$\begin{aligned}
& |(H.A)_0| + \sum_{i=0}^{\infty} |(H.A)_{\frac{i+1}{2^n}} - (H.A)_{\frac{i}{2^n}}| = \\
= \ & |H_0||A_0| + \sum_{i=0}^{\infty} |\int_{(\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}]} H_s dA_s| \leq \\
\leq \ & |H_0||A_0| + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{(\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}]} |H_s| d|A|_s = \\
= \ & |H_0||A_0| + \int_{(0,\infty)} |H_s| d|A|_s = \\
= \ & \int_{[0,\infty)} |H_s| d|A|_s
\end{aligned}$$

Se reţin primul şi ultimul membru din relaţiile de mai sus şi se face $n \to \infty$. Se aplică relaţia (3) de la pag.38 şi se obţine

$$|H.A|_\infty \leq (|H|.|A|)_\infty$$

relaţie din care rezultă că $H.A$ are variaţie totală integrabilă (precizăm că $|H|$ este funcţia modul aplicată lui H,iar $|A|$ şi $|H.A|$ reprezintă variaţiile lui A şi , respectiv, $H.A$.

In baza proprietăţi b) $H.A$ are aceleaşi proprietăţi ca şi A. In particular are limite finite la stînga. Proprietatea c) rezultă din definiţia integralei Stieltjes pe mulţimile $[0,s)$ şi $\{s\}$.

Analogia dintre $H.A$ şi A merge mai departe prin proprietea d) Ea rezultă din definiţia (1), folosind şi faptul că dacă H este opţional, H este progresiv măsurabil şi $H.A$ va fi adaptat, continuu la dreapta, cu limite finite la stînga, deci opţional (propoziţia 1.13).

Proprietăţile e),g) şi h) rezultă trivial din definiţia (1).

Pentru proprietatea i) observăm mai întîi că procesul KH satiskace o condiţie de tipul lui (1) în raport cu A, iar egalitatea la momentul t rezultă din proprietăţi cunoscute ale integralei Lebesgue-Stieltjes.

Proprietatea i) este transcrierea teoremei Beppo-Levi în acest context.

Pentru demonstraţia ultimei proprietăţi să observăm mai întîi că membrul drept este măsura (cu semn) de densitate H în raport cu măsura (cu semn) PA. Din definiţia integralei în raport cu o măsură cu semn şi din descompunerea Jordan a lui A, rezultă că ne putem restrînge la cazul A pozitiv şi crescător şi H pozitiv. In acest caz ambii membri sunt măsuri (pozitive) şi va fi suficient să verific egalitatea pentru $H = \mathbf{1}_{F\times[0,t]}$ cu $F \in \mathcal{F}$ şi $t \in \mathbf{R}_+$.Avem

$$\begin{aligned}
P(H.A)(F \times [0,t]) &= \int\int \mathbf{1}_{F\times[0,t]} d(H.A) dP = \\
\int \mathbf{1}_F \Big(\int_{[0,t]} d(H.A)_s\Big) dP &= \int \mathbf{1}_F (H.A)_t dP = \\
\int \mathbf{1}_F \Big(\int_{[0,t]} H_s dA_s\Big) dP &= \int \mathbf{1}_{F\times[0,t]} H dPA = \\
&= H(PA)(F \times [0,t])
\end{aligned}$$

Următorul rezultat arată că dacă A este martingal şi H este previzibil, $H.A$ este tot martingal.

Teorema 2.10 *Presupunem că A este martingal VI şi H este proces previzibil astfel încît H este integrabil în raport cu măsura $P|A|$. Atunci procesul $H.A$ este martingal VI.*

`Demonstaţie` Numai condiţia de martingal trebuie verificată. Se poate presupune $A_0 = 0$. Va fi suficient să verificăm că

$$P(H.A) \circ \pi^p = 0$$

(propoziţia 2.3). Dar

$$P(H.A) = H(PA)$$

(punctul j) din propoziţia precedentă şi

$$PA \circ \pi^p = 0,$$

pentrucă A este martingal. Această egalitate înseamna că restricţia lui PA la mulţimile previzibile este nulă. Atunci şi

$$H(PA) \circ \pi^p = 0.$$

Capitolul 3

Martingale

3.1 Martingale de pătrat integrabil

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, t \in [0, \infty))$ un cîmp de probabilitate filtrat verificînd condiţiile uzuale.

Dacă $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P) := L_1$ şi $X = (X_t)_{t \geq 0}$,un proces continuu la dreapta cu limite finite la stînga, verificînd $X_t = E(f|\mathcal{F}_t)$ a.s., pentru orice $t \geq 0$ ([9], teorema 2.10). Acest proces este unic datorită convenţiei de identificare a proceslor indistinguabile, va fi notat cu

$$m^f := (m_t^f)_{t \geq 0},$$

şi se va numi *martingalul generat de* f. Aplicînd teorema de convergenţă a martingalelor (Teorema 2.8 [9]) , există

$$m_\infty^f := \lim_{t \to \infty} m_t^f \text{ , a.s. şi în } L_1$$

şi $((m_t^f)_{t \geq 0}, m_\infty^f, f)$ formează martingal relativ la filtraţia $((\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F})$. Rezultă că martingalul generat de f coincide cu cel generat de m_∞^f. Dacă $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$, atunci $m_\infty^f = f$ a.s.

Definiţia 3.1 *Se numeşte martingal de pătrat integrabil, martingalul generat de o funcţie din* L_2.

Introducem notaţia

$$\mathcal{M} = \{X \mid X \text{ martingal de pătrat integrabil}\}$$

Lema 3.1 *Fie $f \in L_2$, $\mathcal{G}$ o sub $-\sigma-$ algebră a lui $\mathcal{F}$ şi $g = E(f|\mathcal{G})$. Atunci $g \in L_2$ şi*

$$E((f-g)^2|\mathcal{G}) = E(f^2|\mathcal{G}) - g^2 a.s.$$

In particular

$$\int (f-g)^2 dP = \int (f^2 - g^2) dP.$$

`Demonstraţie` Se ştie ([9], teorema 1.2 , a)) că g este proiecţia lui $f \in L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pe $L_2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ care este un subspaţiu Hilbert al lui L_2, deci g este de pătrat intgrabil.

Prima egalitate este o consecinţă a proprietătilor valorii medii condiţionate, ţinînd seama că g este $\mathcal{G}$ măsurabilă :

$$\begin{aligned} E((f-g)^2|\mathcal{G}) &= E(f^2|\mathcal{G}) - E(2fg|\mathcal{G}) + E(g^2|\mathcal{G}) = \\ &= E(f^2|\mathcal{G}) - 2gE(f|\mathcal{G}) + g^2 = E(f^2|\mathcal{G}) - 2g^2 + g^2 = \\ &= E(f^2|\mathcal{G}) - g^2, \text{a.s.} \end{aligned}$$

A doua egalitate este prima, integrată pe Ω membru cu membru.

Propoziţia 3.1 *Fie $X \in \mathcal{M}$. Atunci $(X_t^2)_{t\in[0,\infty]}$ este un submartingal uniform integrabil şi*

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty \text{ în } L_2.$$

Oricare ar fi şirul crescător de opţionale (T_n) cu $T_n \to \infty$, are loc

$$\lim_{t\to\infty} X_{T_n} = X_\infty \text{ în } L_2$$

`Demonstraţie` Este suficient să demonstrăm ultima afirmaţie.

Dacă se foloseşte teorema de opţionalizare ([9], teorema 2.11), avem

$$E(X_\infty|\mathcal{F}_{T_n}) = X_{T_n}, \text{ pentru orice } n, \text{ a.s.}$$

Din lema anterioară se ştie că

$$(1) \int (X_\infty - X_{T_n})^2 dP = \int (X_\infty^2 - X_{T_n}^2) dP$$

Procesul $(X_{T_n}^2, \mathcal{F}_{T_n}, n \geq 1)$ este un submartingal ([9], corolar 2.17) pozitiv, închis de perechea $(X_\infty^2, \mathcal{F}_\infty)$, deci uniform integrabil ([9], propoziţia 2.9). Avem $X_\infty^2 = \lim_{n\to\infty} X_{T_n}^2$, a.s. şi pe baza criteriului lui Lebesgue ([9], teorema 2.6), convergenţa are loc şi în L_1. Din (1) se obţine afirmaţia pe care ne-am propus s-o demonstrăm.

Teorema 3.1 *Fie X un martingal de pătrat integrabil. Există un proces A crescător, cu $A_0 = 0$, continuu la dreapta, cu A_∞ integrabilă, previzibil, unic, astfel încît $(X_t^2 - A_t)_{t\geq 0}$ să fie martingal uniform integrabil.*

`Demonstraţie` Fie

$$p_t = E(X_\infty^2|\mathcal{F}_t) - X_t^2, \text{pentru } t \geq 0$$

Din propoziţia precedentă rezultă că $p = (p_t)_{t\geq 0}$ este potenţial de clasă (D).Aplicînd descompunerea Doob-Meyer (teprema 2.8), rezultă că există un proces crescător cu $A_0 = 0$,continuu la dreapta, cu A_∞ integrabilă, previzibil, astfel încît

$$p_t = E(A_\infty|\mathcal{F}_t) - A_t, \text{ sau}$$

$$E(X_\infty^2 - A_\infty|\mathcal{F}_t) = X_t^2 - A_t$$

pentru orice $t \geq 0$.

Să demonstrăm unicitatea. Dacă ar mai exista un proces B satisfăcînd teorema, atunci procesul $A - B$ ar fi martingal, proces VI, previzibil şi nul în origine, deci este nul, în baza corolarului 2.4.

Definiţia 3.2 *Fie $X \in \mathcal{M}$. Procesul A din teorema de mai sus se numeşte procesul crescător natural asociat martingalului X.*

Propoziţia 3.2 *Procesul crescător natural A, asociat martingalului de pătrat integrabil x, este caracterizat de relaţia*

$$\int (X_T^2 - X_S^2)dP = \int (A_T - A_S)dP,$$

sau de relaţia

$$\int (X_T - X_S)^2 dP = \int (A_T - A_S)dP,$$

pentru orice opţionale S şi T satifăcînd $S \leq T$.

`Demonstraţie` Cele două egalităţi sunt echivalente aşa că vom arăta că prima îl caracterizează pe A. Egalitatea de mai sus rezultă din faptul că $(X_t^2 - A_t)_{t\geq 0}$ este martingal uniform integrabil şi i se poate aplica teorema de opţionalizare (corolarul 2.17). Pentru cealaltă implicaţie, se vor alege un

$t \geq 0$, un $F \in \mathcal{F}_t$ şi $S(\omega) = t$, dacă $\omega \in F$ şi $S(\omega) = \infty$,dacă $\omega \notin F$. Opţionala $T \geq S$ se va alege identic egală cu ∞. Se obţine

$$\int_F (X_\infty^2 - X_t{}^2)dP = \int_F (A_\infty - A_t)dP,$$

de unde, ţinînd seama că F este arbitrar în $\mathcal{F}_t$, se obţine

$$E(X_\infty^2 - A_\infty | \mathcal{F}_t) = X_t^2 - A_t.$$

Definiţia 3.3 *Martingalul $X \in \mathcal{M}$ se numeşte cuasicontinuu, dacă oricare ar fi şirul crescător de opţionale (T_n) cu $\lim_n T_n = T$, avem*

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T, \ \ a.s.$$

Teorema 3.2 *Fie $X \in \mathcal{M}$. Procesul crescător natural asociat lui x este continuu, dacă şi numai dacă X este cuasicontinuu.*

`Demonstraţie` Fie A procesul crescător natural asociat lui X. Dacă A este continuu şi (T_n) este un şir crescător de opţionale cu $\lim_n T_n = T$, din teorema de opţionalizare rezultă că $(X_{T_n}, \mathcal{F}_{T_n}, n \geq 1)$ este martingal. El este uniform integrabil, deoarece $(X_T, \mathcal{F}_T)$ îl închide, deci există $\lim_n X_{T_n} := g$,a.s şi în L_1 şi $(X_{T_1}, ..., X_{T_n}, ..., g, X_T)$ este martingal relativ la filtraţia

$$(\mathcal{F}_{T_1}, ..., \mathcal{F}_{T_n}, ..., \sigma(\cup_n \mathcal{F}_{T_n}), \mathcal{F}_T).$$

Deoarece $X_T \in L_2$,

$$(X_{T_1}^2, ..., X_{T_n}^2, ..., g^2, X_T^2)$$

este submartingal nenegativ (relativ la aceeaşi filtraţie) cu ultim elment, şi în baza [9] este uniform integrabil.Va rezulta că $\lim_n X_{T_n}^2 := g^2$, în L_1. Din lema 3.1 rezultă

$$\int (g - X_{T_n})^2 dP = \int (g^2 - X_{T_n}^2) dP,$$

deci $\lim_n X_{T_n} = g$ şi în L_2.

Pe de altă parte, din propoziţia anterioară avem

$$\int (X_T - X_{T_n})^2 dP = \int (A_T - A_{T_n}) dP$$

Dacă se face $n \to \infty$ în această relaţie, membrul drept tinde la zero datorită continuităţii lui A şi teoremei convergenţei dominate, deci $\lim_n X_{T_n} = X_T$ în L_2. Va rezulta $g = X_T$, a.s.,deci

$$\lim_n X_{T_n} = X_T, \text{a.s.}$$

Am demonstrat că X este cuasicontinuu.

Reciproca se lasă pe seama cititorului. Se va ţine seama că salturile lui A, dacă există, se află pe o mulţime cel mult numărabilă de opţionale previzibile.

Definiţia 3.4 *Vom spune că martingalele X şi Y din $\mathcal{M}$ sunt ortogonale şi vom scrie $X \perp Y$, dacă procesul $(X_tY_t)_{t\in[0,\infty)}$ este un martingal de medii nule.*

Observaţia 3.1 *Dacă $X \perp Y$, rezultă că $(X_tY_t)_{t\in[0,\infty]}$ este martingal de medii nule.*

`Demonstraţie` Intr-adevăr, din propoziţia rezultă că $X_t \to X_\infty$ şi $Y_t \to Y_\infty$ în L_2 (cînd $t \to \infty$) , deci $X_tY_t \to X_\infty Y_\infty$ în L_1 şi $E(X_\infty Y_\infty|\mathcal{F}_s) = X_sY_s$, pentru orice $s \geq 0$.

Propoziţia 3.3 *Fie $X, Y \in \mathcal{M}$. Următoarele proprietăţi sunt echivalente.*

a) $X \perp Y$

b) $\int X_TY_TdP = 0$, *oricare ar fi opţionala T.*

c) $\int X_TY_SdP = 0$, *oricare ar fi opţionalele T şi S*

`Demonstraţie` Să observăm mai întîi că b) înseamnă $X_T \perp Y_T$ oricare ar fi opţionala T,iar c) înseamnă

$$\{X_T|T \text{ opţională}\} \perp \{Y_T|T \text{ opţională}\},$$

în ambele situaţii semnul $\perp$ însemnînd ortogonalitate în L_2(nu vom distinge în notaţii ortogonalitatea în $\mathcal{M}$ de cea în L_2,deoarece sensul reiese din context).

a) $\Rightarrow$ *b)* din teorema de opţionalizare pe baza observaţiei de mai sus.

b) $\Rightarrow$ *c)* deoarece

$$\begin{aligned} \int X_TY_SdP &= \int E(X_TY_S|\mathcal{F}_S)dP = \\ \int Y_SE(X_T|\mathcal{F}_S)dP &= \int Y_SE(X_T|\mathcal{F}_{\min(T,S)})dP = \\ \int Y_SX_{\min(S,T)}dP &= \int Y_{\min(S,T)}X_{\min(S,T)}dP. \end{aligned}$$

In calculul de mai sus am folosit proprietăţi uzuale ale valorilor medii condiţionate de $\sigma-$ algebre asociate opţionalelor (vezi [9], propoziţia 2.12 f)
.

$c) \Rightarrow b)$ este trivială.

$b) \Rightarrow a)$ este consecinţă a lemei 2.3.

3.2 Spaţii opţional stabile şi structura martingalelor de pătrat integrabil

Vom face ipoteza $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. Dacă $X \in \mathcal{M}$ şi $X = m^f$, va rezulta că $X_\infty = \lim_{t\to\infty} m_t^f = f$ şi corespondenţa $X \to f = X_\infty$ devine o bijecţie între $\mathcal{M}$ şi L_2. Prin această bijecţie $\mathcal{M}$ se identifică cu L_2 şi devine spaţiu Hilbert cu $||X|| := ||X_\infty|| = ||f||$. In această secţiune vom vedea implicaţiile pe care această identificare le are asupra lui $\mathcal{M}$.

Fie X şi Y martingale în $\mathcal{M}$ şi fie f şi respectiv, g imaginile lor prin bijecţia de mai sus. Au loc relaţiile $X = m^f$ şi $Y = m^g$. Dacă $X \perp Y$ (definiţia 3.4.),atunci $f \perp g$ în L_2. Reciproca însă poate să nu fie adevărată, două funcţii pot fi ortogonale, fără ca martingalele generate să fie ortogonale. De aceea ortogonalitatea indusă pe $\mathcal{M}$ de identificarea lui $\mathcal{M}$ cu L_2, este mai puţin restrictivă ca cea din definiţia 3.4 .

Definiţia 3.5 *O mulţime $H \subset L_2$ se numeşte opţional stabilă , dacă oricare ar fi $f \in H$, are loc $E(f|\mathcal{F}_T) \in H$, pentru orice opţională T.*

O mulţime $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}$ se numeşte opţional stabilă dacă oricare ar fi $X \in \mathcal{H}$ şi oricare ar fi opţionala T, rezultă $X^T \in \mathcal{H}$, unde X^T este stopatul lui X la momentul T.

Se observă că opţional stabilitatea unei familii de martingale este echivalentă cu opţional stabilitatatea mulţimii generatorilor martingalelor. Aceasta rezultă din faptul că stopatul lui X la momentul T, X^T , este martingalul generat de X_T ([9],corolarul 2.16) . Teorema următoare este o consecinţă imediată a celor de mai sus.

Teorema 3.3 *Dacă $L_2 = H \oplus K$ este o descompunere a spaţiului Hilbert L_2 în suma a două subspaţii ortogonale. Dacă aceste subspaţii sunt şi opţional stabile, atunci din relaţia $f = h+k$, unde $h\in H$ şi $k\in K$, rezultă $m^f = m^h + m^k$ iar martingalele m^f şi m^k sunt ortogonale (în $\mathcal{M}$).*

In acest mod se poate descompune un martingal în sumă de martingale ortogonale. Această proprietate face interesante acele subspaţii ale lui L_2 care sunt şi opţional stabile, pentru că ele vor genera martingale ortogonale.

Propoziţiile care urmează pregătesc introducerea acestor subspaţii.

Propoziţia 3.4 *Dacă H este o submulţime opţional stabilă a lui L_2, rezultă :*

a) Subspaţiul liniar închis generat de H este opţional stabil.

b) Ortogonalul lui H în L_2,adică

$$H^{\perp} = \{f \in L_2 | \int fhdP = 0, \ \textit{oricare ar fi } h \in H\}$$

este subspaţiu opţional stabil.

Demonstraţie a) Spaţiul liniar generat de H este opţionl stabil, din liniaritate mediei condiţionate. Inchiderea acestui spaţiu este opţional stabilă din continuitatea în L_2 a mediei condiţionate. S-a obţinut că subspaţiul Hilbert generat de H în L_2,este opţional stabil.

b) Se ştie că $H^{\perp}$ este subspaţiu (Hilbert) în L_2. Pentru a vedea că este opţional stabil, fie $f \in H^{\perp}$ şi T o opţională. Trebuie să arătăm că $E(f|\mathcal{F}_T) \in H^{\perp}$. Intr-adevăr, dacă $h \in H$, avem

$$\int E(f|\mathcal{F}_T)hdP = \int fE(h|\mathcal{F}_T)dP = 0,$$

deoarece $E(h|\mathcal{F}_T) \in H$.

Propoziţia 3.5 *Fie $f \in L_2$ şi $X = m^f$. Atunci*

$$X^*(\omega) := \sup_{t \geq 0} | X_t(\omega)| \in L_2 \quad \textit{şi} \quad ||X^*|| \leq 2||f||$$

Demonstraţie Propoziţia este inegalitatea Doob pentru norme ([9],teorema 2.9). Avem

$$||X^*|| = ||\sup_{t \geq 0} | X_t||| \leq 2 \sup_{t \geq 0} ||X_t|| = 2||X_\infty||$$

ultima egalitate fiind adevărată datorită convergenţei în L_2 a lui X_t la X_∞. Dar $X_\infty = \lim_{t \to \infty} X_t$ a.s. şi $X_\infty = f$, a.s. (vezi începutul paragrafului anterior).

Teorema 3.4 *Să considerăm un şir de funcţii $(f_n)_n$ convergent în L_2 la f. Atunci există un subşir($f_{n_k})_k$, astfel încît, aproape toate traiectoriile martingalului $m^{f_{n_k}}$ să conveargă uniform la traiectoriile lui m^f, cînd $k \to \infty$, adică*

$$(1) \lim_{k\to\infty} \sup_{t\geq 0} |m_t^{f_{n_k}}(\omega) - m_t^f(\omega)| = 0, \ a.s.$$

`Demonstraţie` Alegem un subşir, ($f_{n_k})_k$, ce satisface

$$(2) ||f_{n_k} - f|| \leq 2^{-k}, \text{pentru orice } k \geq 1$$

Aplicînd propoziţia anterioară avem

$$|| \sup_{t\geq 0} |m_t^{f_{n_k}} - m_t^f||| = || \sup_{t\geq 0} |m_t^{f_{n_k}-f}||| \leq 2||f_{n_k} - f||$$

şi pe baza lui (2),

$$|| \sup_{t\geq 0} |m_t^{f_{n_k}} - m_t^f|| \leq 2^{-k+1}.$$

Inseamnă că are loc

$$\sum_k || \sup_{t\geq 0} |m_t^{f_{n_k}} - m_t^f|| \ < \infty$$

adică seria este convergentă. Din criteriul comparaţiei pentru serii cu termeni pozitivi, rezultă

$$\sum_k \int \sup_{t\geq 0} |m_t^{f_{n_k}}(\omega) - m_t^f(\omega)| dP < \infty$$

este convergentă. Permutînd suma cu integrala, se obţine

$$\int \sum_k \sup_{t\geq 0} |m_t^{f_{n_k}}(\omega) - m_t^f(\omega)| dP < \infty,$$

de unde integrandul este finit aproape sigur, sau

$$\sum_k \sup_{t\geq 0} |m_t^{f_{n_k}}(\omega) - m_t^f(\omega)| dP < \infty, \text{a.s.}$$

Dar termenul general al unei serii convergente tinde la zero, deci se obţine (1)

Propoziţia este demonstrată.

Corolarul 3.1 *In condiţiile teoremei anterioare , există* $\Lambda \in \mathcal{F}$, *cu* $P(\Lambda) = 0$, *astfel încît oricare ar fi* $\omega \notin \Lambda$, *să avem pentru orice opţională* S,

$$\lim_{k\to\infty} m_S^{f_{n_k}}(\omega) = m_S^f(\omega), \lim_{k\to\infty} m_{S-}^{f_{n_k}}(\omega) = m_{S-}^f(\omega)$$
$$\text{şi } \lim_{k\to\infty} \Delta m_S^{f_{n_k}} = \Delta m_S^f,$$

Toate cele trei egalităţi au loc şi în L_2.

Demonstraţie Fie Λ mulţimea excepţională din relaţia (1) a propoziţiei precedente. Datorită convergenţei uniforme în raport cu t,a traiectoriei $\omega(\notin \Lambda)$ a lui $m^{f_{n_k}}$ la traiectoria ω a lui m,primele două relaţii sunt îndeplinite, iar a treia se obţine scăzînd membru cu membru primele două.

Dintre convergenţele în L_2, să demonstrăm că $\lim_{k\to\infty} m_{S-}^{f_{n_k}} = m_{S-}^f$. Celelalte cazuri se pot face la fel. Fie

$$X^{(k)} := m^{f_{n_k}} - m^f, \ k \geq 1$$

Avem

$$|m_{S-}^{f_{n_k}} - m_{S-}^f|^2 \leq \sup_{t\geq 0} |m_t^{f_{n_k}} - m_t^f|^2 = ((X^{(k)})^*)^2$$

şi

$$||m_{S-}^{f_{n_k}} - m_{S-}^f|| \leq ||(X^{(k)})^*|| \leq 2||f_{n_k} - f|| \leq 2^{-n_k+1}.$$

Se face $k \to \infty$ în această inegalitate şi demonstraţia s-a încheiat.

Introducem următoarele mulţimi:

$$C := \{f \in L_2|\ m^f \text{ este martingal continuu, cu } m_0^f = 0\}$$

şi

$$Q =: \{f \in L_2|\ m^f \text{ este martingal cuasicontinuu, cu } m_0^f = 0\}$$

Evident $C \subset Q$.

Teorema 3.5 C *şi* Q *sunt subspaţii Hilbert, opţional stabile ale lui* L_2.

Demonstraţie Din liniaritatea mediei condiţionate, rezultă că C şi Q sunt subspaţii liniare ale lui L_2.

Să demonstrăm că sunt opţional stabile. Intr-adevăr, dacă $f \in C$ (respectiv, $f \in Q$), T este o opţională şi $g = E(f|\mathcal{F}_T)$, avem

$$m_t^g = E(g|\mathcal{F}_t) = E(E(f|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_t) = E(f|\mathcal{F}_{\min(T,t)}) = m_{\min(T,t)}^f$$

Am obţinut că martingalul generat de g este stopatul la momentul T al martingalului generat de f , deci rămîne continuu (respectiv, cuasicontinuu).

Faptul că C şi Q sunt închise este o consecinţă a teoremei 3.3. Teorema este demonstrată.

Introducem următoarele submulţimi ale lui $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^c &= \{m^f | f \in C\} \\ \mathcal{M}^q &= \{m^f | f \in Q\} \\ \mathcal{M}^d &= \{m^f | f \in C^\perp\} \end{aligned}$$

Elementele primei mulţimi sunt toate martingalele de pătrat integrabil continue nule în 0, ale celei de a doua sunt cele cuasicontinue nule în 0, iar ale celei de a treia sunt martingalele ortogonale pe cele continue.Din Teorema 3.3 şi Propoziţia 3.4, rezultă că aceste mulţimi sunt subspaţii (liniare) opţional stabile ale lui $\mathcal{M}$. Proprietatea de subspaţiu închis în L_2 a generatorilor, se traduce astfel : dacă $(X^{(n)}) \subset \mathcal{M}^c$ (respectiv $\mathcal{M}^q$, respectiv $\mathcal{M}^d$) şi $X_\infty^{(n)} \to f$ în L_2, rezultă $m^f \in \mathcal{M}^c$(respectiv $\mathcal{M}^q$, respectiv $\mathcal{M}^d$). Martingalele din $\mathcal{M}^d$ se vor numi *pur discontinue*. Justificarea acestei denumiri va fi făcută de Corolarul 3.4.Prin identificarea $\mathcal{M} \equiv L_2$ făcută la începutul acestui paragraf, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^c &\equiv C, \mathcal{M}^q \equiv Q, \mathcal{M}^d \equiv C^\perp \\ \mathcal{M}^c &\subset \mathcal{M}^q, \mathcal{M}^d = (\mathcal{M}^c)^\perp \end{aligned}$$

Teorema 3.6 *Orice $X \in \mathcal{M}$ se poate reprezenta unic sub forma*

$$(3)\ X = X^c + X^d$$

şi sub forma

$$(4)\ X = X^c + Y + Z$$

cu $X^c, X^d, Y, Z \in \mathcal{M}$,unde $X^c \in \mathcal{M}^c$, $X^d \in \mathcal{M}^d, Y \in \mathcal{M}^q$ şi este ortogonal pe orice martingal continuu, iar Z este ortogonal pe orice martingal cuasicontinuu.

`Demonstraţie` Se consideră următoarele reprezentări ale lui L_2 :

$$(5)\ L_2 = C \oplus C^\perp$$

şi

$$(6)\ L_2 = C \oplus (Q \ominus C) \oplus Q^{\perp}$$

în care am folosit notaţia $Q \ominus C := Q \cap C^{\perp}$.Relaţia (3) se va obţine din (5) iar (4) se va obţine din (6). Vom demonstra în continuare numai (4), deoarece (3) se demonstrează analog.

Dacă $X = m^f$, considerăm descompunerea lui f dată de (6):

$$(7)\ f = k + g + h$$

unde $k \in C, g \in Q \ominus C$ şi $h \in Q^{\perp}$.Cele trei subspaţii din (6) sunt opţional stabile (propoziţia 3.4 şi teorema 3.5) . Aplicînd relaţiei (7) operatorul $E(\cdot|\mathcal{F}_t)$, se obţine

$$m_t^f = m_t^k + m_t^g + m_t^h \text{ a.s.}$$

pentru orice $t \geq 0$. Deci $X^c = m^k, Y = m^g$ şi $Z = m^h$.

Unicitatea rezultă din unicitatea descompunerilor în subspaţii ortogonale ale lui L_2.

Observaţia 3.2 *In teorema de mai sus avem $X^d = Y + Z$ şi această descompunere este cea dată de reprezentarea $C^{\perp} = (Q \ominus C) \oplus Q^{\perp}$. Deasemenea, avem $X = X^q + Z$, unde $X^q = X^c + Y$, şi această descompunere corespunde reprezentării $Q = C \oplus (Q \ominus C)$.*

Observaţia 3.3 *Relaţiile (3) şi (4) din teorema de mai sus se scriu sub formele:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}^c \oplus \mathcal{M}^d \\ \mathcal{M} &= \mathcal{M}^c \oplus (\mathcal{M}^q \cap \mathcal{M}^d) \oplus (\mathcal{M}^q)^{\perp} \end{aligned}$$

Propoziţia 3.6 *Dacă $X \in \mathcal{M}^q$, opţionalele de salt ale lui X sunt total inaccesibile.*

`Demonstraţie` Se vede uşor, folosind [9], propoziţia 3.4 ,că este suficient să arătăm că, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$T(\omega) = \inf\{t \mid |X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)| > \varepsilon\}$$

este total inaccesibilă. Vom arăta acest lucru folosind caracterizarea dată în teorema 1.2 b) opţionalei total inaccesibile. Fie (S_n) un şir crescător de opţinale şi fie $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.Au loc următcarele relaţii:

$$P(\{S = T < \infty, S_n < T, \text{pentru orice } \ n\}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \int \mathbf{1}_{\{\{S=T<\infty, S_n<T, \text{pentru orice } n\}}(X_S - X_{S-})dP =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int \mathbf{1}_{\{\{S=T<\infty, S_n<T, \text{pentru orice } n\}}(X_S - \lim_{n\to\infty} X_{S_n})dP = 0$$

deoarece $X \in Q$.Propoziţia este demonstrată.

Fie T o opţională cu $P(\{T > 0\}) = 1$. Considerăm următoarea submulţime a lui $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}([T]) \; : \; = \{ \, X \in \mathcal{M} | \, X_\infty \in C^\perp, \; X \text{ continuu cu excepţia graficului lui } T \, \}$$

Mai întîi observăm că

$$X_\infty \in C^\perp \Leftrightarrow X \in \mathcal{M}^d$$

deci

$$\mathcal{M}([T]) \subset \mathcal{M}^d.$$

Mulţimea $\mathcal{M}([T])$ formează subspaţiu liniar închis al lui $\mathcal{M}^d$, datorită Corolarului 3.1 El este şi opţional stabil, deoarece singurele discontinuităţi ale unui martingal din $\mathcal{M}([T])$, stopat la un moment aleator de timp, pot să apară tot printre discontinuităţile martingalului iniţial, deci tot pe graficul lui T.

Teorema 3.7 *Să presupunem T total inaccesibil (respectiv previzibil) şi $X \in \mathcal{M}([T])$. Atunci*

a) X este proces VI şi are expresia de forma

$$X = {}^cA, \; \textit{unde } A_t = \Delta X_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}}$$

In cazul T previzibil, are loc în plus egalitatea

$$X_t = E(\Delta X_T | \mathcal{F}_t) \; \textit{a.s., pentru orice } t \geq 0$$

b) Pentru orice $N \in \mathcal{M}$, procesul

$$X_t N_t - \sum_{s\leq t} \Delta X_s \Delta N_s = X_t N_t - \Delta X_T \Delta N_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}}$$

este martingal nul în origină. In particular,

$$\int X_\infty^2 dP = \int (\Delta X_T)^2 dP$$

şi X este ortogonal pe orice martingal din $\mathcal{M}$ care nu are discontinuităţi comune cu X.

c) Dacă $Y \in \mathcal{M}$, proiecţia lui Y pe $\mathcal{M}([T])$ este ${}^cA$, cu $A_t = \Delta Y_T \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$ pentru $t \geq 0$.

`Demonstraţie` Se va aplica Teorema 2.6, în cazul $f = \Delta X_T$.

Vom demonstra mai întîi teorema în ipoteza că T este total inaccesibil. Din teorema citată mai sus se ştie că compensatul lui $A, \tilde{A}$, este continuu cu $\tilde{A}_\infty$ de pătrat integrabil şi ${}^cA = A - \tilde{A}$ este martingal VI de pătrat integrabil, cu salt egal cu f de-alungul graficului lui T . Să presupunem că am demonstrat că ${}^cA \in \mathcal{M}^d$. Va rezulta $X - {}^cA \in \mathcal{M}^d$. Pe de altă parte, $X - {}^cA$ nu mai are discontinuităţi, deci $X - {}^cA \in \mathcal{M}^c$.Va rezulta $X - {}^cA \perp X - {}^cA$, deci $X - {}^cA = 0$.

Apartenenţa lui ${}^cA$ la $\mathcal{M}^d$,va reieşi din Propoziţia 2.4. Din această propoziţie se ştie că oricare ar fi N, martingal mărginit, procesul

$$(7)\ L_t = ({}^cA)_t N_t - \sum_{s \leq t} \Delta({}^cA)_s \Delta N_s$$

este martingal uniform integrabil, nul în 0. Această proprietate este echivalentă (lema 2.3) cu următoarea : oricare ar fi opţionala S,

$$(8) \int ({}^cA)_S N_S) dP = \int f(\Delta N)_T \mathbf{1}_{\{T \leq S\}} dP$$

Dacă $N \in \mathcal{M}$ este oarecare, există un şir $N^{(n)}$ de martingale mărginite cu $N_\infty^{(n)} \to N_\infty$ în L_2 şi $\Delta N_T^{(n)} \to \Delta N_T$ în L_2. Rezultă că relaţia (8) şi odată cu ea relaţia (7) sunt valabile, oricare ar fi $N \in \mathcal{M}$. Aplicînd propoziţia 3.3 rezultă că ${}^cA$ este ortogonal pe orice martingal $N \in \mathcal{M}$, care nu are discontinuităţi în comun cu ${}^cA$. In particular, ${}^cA$ este ortogonal pe martingalele continue, adică ${}^cA \in \mathcal{M}^d$, deci ${}^cA = X$ şi dacă se scriu (8) şi (7) ţinînd cont de această egalitate , se obţine prima parte din b).

Alegînd $N = {}^cA = X$ şi $S = \infty$ în (8), se obţine

$$\int X_\infty^2 dP = \int f^2 dP = \int \Delta X_T^2 dP$$

Pentru punctul c), să alegem Y arbitrar în $\mathcal{M}$ şi să-l contruim pe ${}^c(\Delta Y_T \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}) := N$. Din a) rezultă că $N \in \mathcal{M}([T])$, iar din b) rezultă că N este ortogonal pe orice martingal din $\mathcal{M}$ care nu are discontinuităţi comune cu N. In particular, $N \perp Y - N$ de unde rezultă afirmaţia de la c).

In cazul T previzibil, fie (T_n) un şir care îl anunţă pe T. Folosind teorema de opţionalizare([9], teorema 2.11) şi teorema de convergenţă pentru martingale ascendente ([9], Corolarul 2.13)

$$X_{T-} = \lim_{n\to\infty} X_{T_n} = \lim_{n\to\infty} E(X_T|\mathcal{F}_{T_n}) = E(X|\mathcal{F}_{T-})$$

deci $\Delta X_T = X_T - X_{T-} \in L_2(\mathcal{F}_T) \ominus L_2(\mathcal{F}_{T-})$. Din Teorema 2.6 b) rezultă ${}^cA$ este martingalul generat de ΔX_T şi ${}^cA = A$, deci apartenenţa lui ${}^cA$ la $\mathcal{M}([T])$ este trivială. Restul demonstraţiei este identic cu cel din cazul T total inaccesibil.

Teorema este demonstrată.

Suntem în măsură să dăm următorul corolar , care completează Teorema 2.6

Corolarul 3.2 *Fie T total inaccesibilă (respectiv previzibilă) şi*

$$L_2^*(\mathcal{F}_T) = \{f \in L_2(\mathcal{F}_T) | \{T = \infty\} \subset \{f = 0\}\}$$

Atunci aplicaţia liniară $\Gamma(f) := {}^cA$, unde $A_t = f\mathbf{1}_{\{t\geq T\}}$, este o bijecţie între $L_2^*(\mathcal{F}_T)$ şi $\mathcal{M}([T])$ care conservă norma.

`Demonstraţie` Corolarul este netrivial numai în cazul T total inaccesibil, deoarece în cazul T previzibil Γ este identitatea.

Lniaritatea este observaţia 2.1.

In Teorema 2.6 s-a arătat că $({}^cA)_\infty \in L_2(\mathcal{F})$ şi că ${}^cA$ este continuu cu excepţia graficului lui T în punctele căruia are saltul f,adică $\Delta\ ({}^cA)_T = f$. Deci Γ este injectivă. Faptul că ${}^cA \in \mathcal{M}^d$ se demonstrează exact ca în teoremă. Deci ${}^cA \in \mathcal{M}([T])$.

Din punctul a) al teoremei anterioare rezultă surjectivitatea, iar din punctul b) rezultă izometria.

Propoziţia 3.7 *Dacă X este generat de o funcţie din $Q^\perp$,există un şir de opţionale previzibile cu grafice disjuncte (T_n), astfel încît*

$$\{(\omega, t)\ |t \geq 0, X_t(\omega) \neq X_{t-}(\omega)\} \subset \bigcup_n [T_n]$$

Demonstraţie Mai întîi precizăm că în mulţimea din stînga $t \geq 0$,iar $\Delta X_0 = X_0$,conform convenţiei că $X_{0-} = 0$. Din acest motiv, în mulţimea din dreapta se consideră reuniunea după $n \geq 0$, cu $T_0 = 0$.

Din Corolarul 1.3 rezultă că este suficient să arătăm că, oricare ar fi T total inaccesibilă,

$$P(\{X_T \neq X_{T-}\}) = 0.$$

Intr-adevăr, pentru un astfel de T notăm $f = X_T - X_{T-}$, si aplicăm corolarul 3.2. Considăm $\Gamma(f) := Y$.Avem $Y \in \mathcal{M}([T])$, $\Delta Y_T = f$ şi din teorema 3.6 $Y \perp X - Y$. Pe de altă parte, Y este cuasicontinuu, avînd salturi doar pe o opţională total inaccesibilă, deci $Y \perp X$, de unde $Y \perp Y$,adică $Y = 0$, deci $f = 0$.

Teorema 3.8 *Fie $f \in C^{\perp}$ şi fie $(T_n)_{n\geq 1}$ un şir de opţionale cu grafice disjuncte, cu T_n fie total inaccesibilă fie previzibilă, pentru orice $n \geq 0$ şi astfel încît*

$$\{(\omega, t) \mid m_t^f(\omega) \neq m_{t-}^f(\omega)\} \subset \bigcup_n [T_n]$$

Atunci există o unică reprezentare a lui f sub forma

$$f = \sum_n f_n, \ \text{în } L_2$$

unde $m^{f_n} \in \mathcal{M}([T_n])$. In acest caz, pentru orice $t \geq 0$,avem

$$m_t^f = \sum_n m_t^{f_n}, \ \text{în } L_2.$$

Demonstraţie Precizăm că T_0 este opţionala identic nulă (previzibilă) şi $m_{0-}^f = 0$.

Fie $g_n := m_{T_n}^f - m_{T_n-}^f$. Tinînd cont de identificarea lui $\mathcal{M}$ cu L_2 , definim

$$f_n := \Gamma(g_n),$$

Să observăm că $m^{f_0} + ... + m^{f_n} = m^{f_0+...+f_n}, n \geq 0$. Deoarece m^{f_k}, nu are discontinuităţi comune cu $m^f - m^{f_0+...+f_n}$,pentru $k = 0, 1, 2, ..., n$, din teorema 3.7 rezultă

$$m^{f_k} \perp m^f - m^{f_0+..+f_n}$$

deci

$$m^{f_0+\ldots+f_n} \perp m^f - m^{f_0+\ldots+f_n}$$

sau

$$(9)\ f_0 + \ldots + f_n \perp f - (\ f_0 + \ldots + f_n)\ ,\ \text{pentru}\ n \geq 0.$$

Are loc

$$\int f^2 dP = \int (\sum_{k=0}^{n} f_k)^2 + \int (f - \sum_{k=0}^{n} f_k)^2 dP \geq \int (\sum_{k=0}^{n} f_k)^2 dP = \sum_{k=0}^{n} \int f_k^2 dP$$

unde am ţinut seama şi de faptul că $m^{f_n} \perp m^{f_k}$,sau $f_n \perp f_k$,dacă $n \neq k$. Rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||^2 < \infty$$

Din criteriul Cauchy se obţine că

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

converge în L_2 şi fie g suma ei. Dacă se face $n \to \infty$ în relaţia (9), se obţine

$$(10)\ g \perp f - g$$

Folosind faptul că există un subşir de întregi (n_k), astfel încît aproape toate traiectoriile lui $m^{f_0+\ldots+f_{n_k}}$ să tindă uniform la traiectoriile lui m^g, rezultă că m^g preia toate salturile lui m^f, deci $m^f - m^g = m^{f-g}$ nu mai are salturi adică este continuu. Va rezulta că $f \perp f - g$ care împreună cu (10) dă $f = g$.

Următorul corolar este o consecinţă imediată a teoremei.

Corolarul 3.3 *Orice martingal pur discontinuu este suma salturilor lui compensate.*

Orice martingal pur discontinuu este ortogonal pe orice martingal (din $\mathcal{M}$) fără discontinuităţi comune cu el.

Comentariu Se poate scrie simbolic, după separarea salturilor total inaccesibile de cele previzibile,

$$Q \ominus C = \oplus_{T\ total\ inacc} \mathcal{M}([T]) = \mathcal{M}^d \cap \mathcal{M}^q$$

$$Q^{\perp} = \oplus_{T\ previzibila} \mathcal{M}([T]) = (\mathcal{M}^q)^{\perp}$$

In această scriere se foloseşte identificarea lui $\mathcal{M}$ cu L_2

Corolarul 3.4 *Fie $X \in \mathcal{M}$. Avem*

$$\int \sum_t (\Delta X_t)^2 dP \leq \int X_\infty^2 dP.$$

Egalitatea are loc atunci şi numai atunci cînd $X \in \mathcal{M}^d$.

Demonstraţie Să considerăm descompunerea

$$X = X^c + X^d$$

cu $X^c \in \mathcal{M}^c$ şi $X^d \in \mathcal{M}^d$(conform teoremei 3.6). Are loc inegalitatea

$$\int X_\infty^2 dP \geq \int (X_\infty^d)^2 dP,$$

cu egalitate atunci şi numai atunci cînd $X \in \mathcal{M}^d$. Dar din teorema 3.8

$$\int (X_\infty^d)^2 dP = \sum_n \int [\Gamma(\Delta X_{T_n})]^2 dP,$$

unde(T_n) un şir de opţionale cu grafice disjuncte care suportă discontinuităţile lui X, fiecare T_n fiind previzibilă sau total inaccesibilă şi unde aplicaţia Γ este cea din corolarul 3.2. Dacă se ţine seama de izometria lui Γ, avem

$$\sum_n \int [\Gamma(\Delta X_{T_n})]^2 dP = \sum_n \int (\Delta X_{T_n})^2 dP =$$

$$= \int \sum_n (\Delta X_{T_n})^2 dP == \int \sum_t (\Delta X_t)^2 dP$$

Corolarul este demonstrat.

Corolarul 3.5 *Dacă $M, N \in \mathcal{M}$,atunci*

$$\int \sum_s |\Delta M_s \Delta N_s| dP \leq ||M_\infty||\ ||N_\infty||$$

Demonstraţie Se integrează membru cu membru inegalitatea

$$\sum_s |\Delta M_s \Delta N_s| \leq (\sum_s |\Delta M_s|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_s |\Delta N_s|^2)^{\frac{1}{2}},$$

care este inegalitatea Cauchy algebrică, extinsă la serii şi este valabilă pentru aproape orice $\omega \in \Omega$. Aplicînd încă o dată inegalitatea Cauchy pentru integrale, se obţine

$$\int \sum_s |\Delta M_s \Delta N_s| dP \leq (\int (\sum_s |\Delta M_s|^2) dP)^{\frac{1}{2}} (\int \sum_s |\Delta N_s|^2) dP)^{\frac{1}{2}}$$

şi în final se foloseşte corolarul anterior.

Corolarul 3.6 *Fie $M \in \mathcal{M}$, asfel încît M este proces VI. Atunci M este pur discontinuu.*

Demonstraţie Dacă $N \in \mathcal{M}$ este mărginit şi nu are discontinuităţi comune cu M, din propoziţia 2.4 rezultă că

$$\int M_\infty N_\infty dP = \int (\sum_s \Delta M_s \Delta N_s) dP$$

Din corolarul anterior, membrul drept este liniar şi mărginit cînd N parcurge mulţimea martingalelor mărginite din $\mathcal{M} \equiv L_2$. Membrul stîng are aceeaşi proprietate, deci egalitatea de mai sus este adevărată, oricare ar fi $N \in \mathcal{M}$. In particular, cînd $N = M$, se obţine

$$\int M_\infty^2 dP = \int (\sum_s (\Delta M_s)^2 dP$$

şi apartenenţa lui M la $\mathcal{M}^d$ rezultă din corolarul 3.5.

In finalul acestui paragraf ,vom da o teoremă care extinde punctul b) al teoremei 3.7.

Teorema 3.9 *Fie $M, N \in \mathcal{M}$, astfel încît cel puţin unul din cele două procese să fie pur discontinuu. Atunci*

a)

$$\int M_\infty N_\infty dP = \int \sum_s \Delta M_s \Delta N_s dP$$

b)

$$M_tN_t - \sum_{s\leq t} \Delta M_s \Delta N_s$$

este martingal nul în 0, dominat în L_1.

c) Dacă $M \in \mathcal{M}^d$, *rezultă că*

$$M_t^2 - \sum_{s\leq t} \Delta M_s^2$$

este martingal nul în 0, dominat în L_1.

Demonstraţie Presupun mai întîi că $M, N \in \mathcal{M}^d$. Egalitatea de la a) rezultă aplicînd corolarul 3.4 lui $M+N, M, N$ şi scăzînd corespunzător, membru cu membru, egalităţile respective. Afirmaţia b) se obţine aplicînd prima relaţie martingalelor $M^T = (M_{\min(t,T)})_{t\geq 0}$ şi $N^T = (N_{\min(t,T)})_{t\geq 0}$ şi folosind apoi lema 2.3. Se observă că procesul de la b) este dominat de

$$\sup_t |M_t(\omega)| \sup_t |N_t(\omega)| + \sum_t |\Delta M_t||\Delta N_t|$$

care este integrabilă, conform propoziţiei 3.5 şi corolarului 3.5. Deci martingalul de la b) este dominat de o funcţie integrabilă (adică dominat în L_1).

Să presupunem acum $M \in \mathcal{M}^d$ şi $N \in \mathcal{M}$. Fie $N = N^c + N^d$ unde $N^c \in \mathcal{M}^c$ şi $N^d \in \mathcal{M}^d$. Afirmaţia b) se obţine scriind-o pentru M şi N^d şi adunînd martingalul $(M_tN_t^c)_{t\geq 0}$ care este nul în origină, dominat în L_1. Avem

$$\int M_\infty N_\infty dP = \int M_\infty N_\infty^d dP = \int \sum_s \Delta M_s \Delta N_s^d dP = \int \sum_s \Delta M_s \Delta N_s dP$$

Afirmaţia c) este consecinţă imediată a lui b).

Capitolul 4

Integrale stocastice

4.1 Procese crescătoare asociate unui martingal de pătrat integrabil

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, t \in [0, \infty))$ un cîmp de probabilitate filtrat verificînd condiţiile uzuale. Reamintim că am notat cu $\mathcal{M}$ mulţimea martingalelor generate de funcţii din $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) := L_2$

Fie $M \in \mathcal{M}$ şi A procesul crescător natural asociat lui M (vezi definiţia 3.2)

Definiţia 4.1 *Primul proces crescător asociat lui M , numit şi variaţia pătratică a lui M este*

$$< M >_t: \ = A_t + M_0^2$$

Denumirea de variaţie pătratică este justificată de următoarea proprietate a cărei demonstraţie este netrivială (vezi [6], 1.5.14), dar care nu intervine în cele ce urmează şi din acest motiv o lăsăm sub formă de exerciţiu.

Exerciţiu Fie $M \in \mathcal{M}^c$, $t > 0$ şi $\pi = \{0, t_1, ..., t_n\}$ cu $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$. Fie $||\pi|| = \max\{t_k - t_{k-1} | k = 1, 2, ..., n\}$. Atunci

$$\lim_{||\pi|| \to 0} \sum_{k=1}^{k=n} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 = \ < M >_t,$$

convergenţa avînd loc în probabilitate.

Observaţia 4.1 *Procesul* $< M >$ *este unicul proces VI previzibil cu proprietatea că* $(M_t^2 - < M >_t)_{t\geq 0}$ *este martingal nul în origină. Dacă* M *este cuasicontinuu,* $< M >$ *este continuu.*

Demonstraţie Din teorema 3.1 rezultă că $< M >$ are aceste proprietăţi. Pentru a demonstra unicitatea, să presupunem că B este alt proces VI previzibil, astfel încît $(M_t^2 - B_t)_{t\geq 0}$ este martingal nul în 0. Scăzînd cele două martingale se obţine că $(B_t - < M >_t)_{t\geq 0}$ este proces VI previzibil, nul în zero şi martingal, iar corolarul 2.4 ne spune că un astfel de proces este nul. Ultima afirmaţie este teorema 3.2.

Definiţia 4.2 *Al doilea proces crescător asociat lui* M *este*

$$[M]_t = \; < M^c >_t + \sum_{0\leq s\leq t} (\Delta M_s)^2$$

unde $M^c \in \mathcal{M}^c$, *şi* $M - M^c \in \mathcal{M}^d$.

Observaţia 4.2 *In definiţia de mai sus* $< M^c >$ *este proces continuu conform teoremei 3.2 şi este nul în 0 deoarece* $M_0^c = 0$. *Convergenţa seriei rezultă din corolarul 3.4.*

Procesul crescător $[M]$ este continuu la dreapta, $[M]_0 = M_0^2$, şi $[M]_\infty$ este integrabilă, deci $[M]$ este proces VI şi expresia prin care este definit este chiar descompunerea Lebesgue a lui.

Propoziţia 4.1 *Dacă* $M \in \mathcal{M}$, *atunci*

a) $M^2 - [M]$ *este martingal nul în* 0,*dominat în* L_1.

b) $[M] - < M >$ *este martingal nul în* 0,*dominat în* L_1.

c) $< M > = \widetilde{[M]}$, *adică* $< M >$ *este compensatul lui* $[M]$.

Demonstraţie a) Dacă $M \in \mathcal{M}^d$, din teorema 3.8 c) se ştie că

$$(M_t^2 - \sum_{s\leq t} \Delta M_s^2)_{t\geq 0}$$

este martingal dominat în L_1.

Dacă M este arbitrar, se consideră descompunerea $M = M^c + M^d$ unde M^c este continuu şi M^d pur discontinuu. Are loc egalitatea

$$M_t^2 - [M]_t = ((M_t^c)^2 - < M^c >_t) + ((M_t^d)^2 - \sum_{0\leq s\leq t} \Delta M_s^2)) + 2M_t^c M_t^d$$

Dar fiecare din cele două paranteze sunt martingale nule în 0,dominate în L_1. Deoarece $M^c \perp M^d$, rezultă că şi ultimul termen are aceeaşi proprietate.

Punctul b) rezultă din punctul a) şi observaţia 4.1

Punctul c) rezultă din b), din previzibilitatea lui $< M >$ şi din corolarul 2.5 b).

Definiţia 4.3 *Fie $M, N \in \mathcal{M}$. Introducem*

$$< M, N >: \ = \frac{1}{2}(< M + N > - < M > - < N >)$$

şi

$$[M, N]: \ = \frac{1}{2}([M + N] - [M] - [N])$$

Evident $< M, N >=< N, M >$ şi $[M, N] = [N, M]$.

Cele două procese din această definiţie s-au obţinut prin "polarizarea" lui $< M, M >=< M >$ şi $[M, M] = [M]$. In continuare vom scrie $< M, M >$ in loc de $< M >$ şi $[M, M]$ in loc de $[M]$. Pentru $< M, N >$ se foloseşte denumirea de *variaţie pătratică mixtă*.

Proprietăţile imediate ale proceselor din definiţia de sus sunt date în următoarea propoziţie.

Propoziţia 4.2 *Fie $M, N \in \mathcal{M}$. Au loc următoarele proprietăţi:*

a) $< M, N >$ şi $[M, N]$ sunt procese VI

b) $< M, N >$ este unicul proces previzibil VI astfel încît $MN - < M, N >$ este martingal nul în origine.

c) $M \perp N$ dacă şi numai dacă $< M, N >= 0$

d) $[M, N]_t = < M^c, N^c >_t + \sum_{s \leq t} \Delta M_s \Delta N_s$, a.s., pentru orice $t \geq 0$.

e) $MN - [M, N]$ este martingal nul în origine.

f) $< M, N >= \widetilde{[M, N]}$, adică $< M, N >$ este compensatorul, sau proiecţia previzibilă duală a lui $[M, N]$.

`Demonstraţie` a) rezultă din definiţia 4.3.

Pentru a demonstra b) , să consideră egalitatea

$$MN - < M, N >= \frac{1}{2}((M + N)^2 - < M + N, M + N >) -$$

$$-\frac{1}{2}(M^2 - < M, M >) - \frac{1}{2}(N^2 - < N, N >)$$

Fiecare din parantezele de sus sunt martingale nule în 0.

Fie B un proces VI previzibil, astfel încît $MN - B$ să fie martingal nul în 0. Atunci $< M, N > -B$ este martingal mul în 0. Fiind şi proces VI previzibil, din corolarul 2.4 rezultă că este nul, deci $B =< M, N >$.

Punctul c) rezultă din b) pe baza definiţiei 3.4.

Punctul d) rezultă din egalităţile

$$[M,N]_t = \frac{1}{2}([M+N, M+N]_t - [M,M]_t - [N,N]_t) =$$

$$= \frac{1}{2}(< M^c + N^c, M^c + N^c >_t - < M^c, M^c >_t - < N^c, N^c >_t) +$$

$$+\frac{1}{2}(\sum_{s\leq t} \Delta(M_s + N_s)^2 - \sum_{s\leq t} \Delta M_s^2 - \sum_{s\leq t} \Delta N_s^2)$$

In final, pentru orice $t \geq 0$, avem

$$[M,N]_t =< M^c, N^c >_t + \sum_{s\leq t} \Delta M_s \Delta N_s, \text{a.s.}$$

Punctul e) se demonstrează ca prima parte din b), pe baza propoziţiei 4.1 a).

Punctul f) se obţine din definiţia 2.5, observînd că b) şi e) implică faptul că procesul $[M, N]- < M, N >$ este martingal şi $< M, N >$ este previzibil.

Propoziţia este demonstrată.

Exerciţiu

Formele $< .,. >$ şi $[.,.]$ sunt biliniare pe $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. In particular,

$$< M, N >= \frac{1}{4}(< M+N, M+N > - < M-N, M-N >)$$

şi analog,

$$[M,N] = \frac{1}{4}([M+N, M+N] - [M-N, M-N])$$

In continuare ne va interesa comportarea celor două procese crescătoare la operaţia de stopare.

Propoziţia 4.3 *Fie $M, N \in \mathcal{M}$ şi T un timp de stopare. Atunci*

$$a) < M, N >^T = \ < M, N^T > \ = \ < M^T, N^T >$$

şi

$$b) \ [M, N]^T = [M, N^T] = [M^T, N^T]$$

Demonstraţie a) Procesele $M^T N^T - < M, N >^T$şi $M N^T - < M, N^T >$ sunt martingale nule în 0 : se aplică teorema 3.7 b) şi teorema de opţionalizare ([9], corolarul 2.16).

Să arătăm ca şi $MN^T - M^T N^T$ este martingal, mai precis că pentru orice $t \geq 0$ avem

$$E(M_\infty N_\infty^T - M_\infty^T N_\infty^T | \mathcal{F}_t) = M_t N_t^T - M_t^T N_t^T$$

Membrul drept din egalitatea de demonstrat este

$$E((M_\infty - M_T)N_T|\mathcal{F}_t) = E((M_\infty - M_T)N_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}}|\mathcal{F}_t) +$$

$$+E((M_\infty - M_T)N_T \mathbf{1}_{\{T>t\}}|\mathcal{F}_t) = (E(M_\infty|\mathcal{F}_t) - M_T)N_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}} =$$

$$= (M_t - M_T)N_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}} = M_t N_t^T - M_t^T N_t^T$$

Am folosit faptul că $E((M_\infty - M_T)N_T \mathbf{1}_{\{T>t\}}|\mathcal{F}_t) = 0$: într-adevăr, pentru orice $A \in \mathcal{F}_t$

$$\int_A E((M_\infty - M_T)N_T \mathbf{1}_{\{T>t\}}|\mathcal{F}_t)dP = \int_A (M_\infty - M_T)N_T \mathbf{1}_{\{T>t\}} dP =$$

$$= \int (M_\infty - M_T)(N_T \mathbf{1}_{\{T>t\}\cap A})dP = 0,$$

deoarece $M_\infty - M_T = M_\infty - E(M_\infty|\mathcal{F}_T)$ este ortogonal pe $L_2(\mathcal{F}_T)$ şi $N_T \mathbf{1}_{\{T>t\}\cap A} \in L_2(\mathcal{F}_T)$.

Din cele de mai sus rezultă că

$$< M, N >^T - < M, N^T >$$

este martingal.Deoarece este şi proces VI previzibil nul în origină, corolarul 2.4 implică prima din egalităţile propoziţiei.

A doua egalitate se obţine aplicînd-o pe prima lui $< M, N^T >$.

b) Dacă $t \geq 0$, avem

$$[M, N]_t^T = [M, N]_{\min(t,T)} = \ < M^c, N^c >_{\min(t,T)} + \sum_{s\leq \min(t,T)} \Delta M_s \Delta N_s =$$

$$=< M^c, N^c >_t^T + \sum_{s\leq t} \Delta M_s \Delta N_s^T$$

Dar punctul a) ne spune că

$$< M^c, N^c >_t^T =< M^c, (N^c)^T >_t .$$

Avem deasemenea,

$$(N^c)^T = (N^T)^c$$

datorită unicităţii proiecţiei lui N^T pe $\mathcal{M}^c$. In final obţinem

$$[M, N]_t^T =< M^c, (N^T)^c >_t + \sum_{s\leq t} \Delta M_s \Delta N_s^T = [M, N^T]_t$$

Ultima egalitate se obţine exact ca la a).

Propoziţia este demonstrată.

Inegalităţile de mai jos sunt esenţiale pentru definirea integralei stocastice. Se numesc inegalităţile Kunita-Watanabe , sunt valabile a.s. pe traiectorii (fără E aplicat integralelor Stieltjes din interior, vezi [7],pag142, sau [12], pag269) şi sunt adevărate pentru procese măsurabile. Pentru definirea integralei stocastice sunt suficiente sub forma demonstrată mai jos.

Menţionăm că pentru a da o formă mai simplă calculelor, vom folosi în continuare notaţia : $E. = E(.) := \int .dP$, atunci cînd funcţia reprezentată cu . de sub integrala în raport cu P , este la rîndul ei o integrală pe $[0, \infty)$.

Teorema 4.1 *Fie $M, N \in \mathcal{M}$ şi X, Y procese previzibile. Avem*

$$a)\ E \int_0^\infty |X_s||Y_s|d| < M, N > |_s \leq$$

$$\leq (E \int_0^\infty |X_s|^2 d < M, M >_s)^{\frac{1}{2}} (E \int_0^\infty |Y_s|^2 d < N, N >_s)^{\frac{1}{2}}$$

şi

$$b)\ E \int_0^\infty |X_s||Y_s|d\ |[M, N]|_s \leq$$

$$\leq (E \int_0^\infty |X_s|^2 d[M, M]_s)^{\frac{1}{2}} (E \int_0^\infty |Y_s|^2 d[N, N]_s)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstraţie Inainte de a începe demonstraţia, precizăm că în integralele Stieltjes pe traiectorii de mai sus, notaţia $d| < M, N > |_s$ înseamnă integrală în raport cu măsura generată de variaţia procesului $< M, N >$. Analog pentru $d|[M, N]|_s$.

Vom parcurge mai multe etape :

1) Vom presupune $0 \leq s < t$ şi r un raţional . Avem

$$< M + rN, M + rN >_t - < M + rN, M + rN >_s \geq 0, a.s$$

Rezultă , prin calcule evidente

$$(< N, N >_t - < N, N >_s)\lambda^2 + 2(< M, N >_t - < M, N >_s)\lambda +$$

$$+(< M, M >_t - < M, M >_s) \geq 0, \text{ a.s.}$$

inegalitate în care λ se poate presupune arbitrar în axa reală.Va rezulta

$$(1) | < M, N >_t - < M, N >_s | \leq$$

$$\leq (< M, M >_t - < M, M >_s)^{\frac{1}{2}} (< N, N >_t - < N, N >_s)^{\frac{1}{2}}$$

2) Să considerăm acum o diviziune finită a lui $\mathbf{R}_+$ de forma

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = \infty$$

şi X_{t_i}, Y_{t_i}, variabile aleatoare mărginite, $\mathcal{F}_{t_i}-$ măsurabile, pentru $i = 0, 1, ..., n$. Să scriem (1) pentru $s = t_i, t = t_{i+1}$ şi să le înmulţim cu $|X_{t_i}|, |Y_{t_i}|$ şi să le adunăm cînd $i = 0, 1, ..., n$. Adunăm deasemenea în ambii membri egalitatea evidentă

$$|X_0 Y_0 M_0 N_0| = |X_0 M_0||Y_0 N_0|.$$

Obţinem

$$(1') |X_0 Y_0 \Delta < M, N >_0 | + \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i}||Y_{t_i}|| < M, N >_{t_{i+1}} - < M, N >_{t_i} | \leq$$

$$\leq |X_0 M_0||Y_0 N_0| + \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i}|(< M, M >_{t_{i+1}} -$$

$$- < M, M >_{t_i})^{\frac{1}{2}} |Y_{t_i}|(< N, N >_{t_{i+1}} - < N, N >_{t_i})^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq [X_0^2 M_0^2 + \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i}|^2 (< M, M >_{t_{i+1}} -$$

$$- < M, M >_{t_i})]^{\frac{1}{2}} [Y_0^2 N_0^2 + |Y_{t_i}|^2 (< N, N >_{t_{i+1}} - < N, N >_{t_i})]^{\frac{1}{2}}$$

In ultima inegalitate am aplicat un Schwarz pentru sume.
Fie

$$\begin{aligned} x_s &= X_0 + \sum_{i=1}^{n} X_{t_i} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s) \text{şi} \\ y_s &= Y_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_{t_i} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s) \end{aligned}$$

Cu această notaţie primul membru în inegalităţile $(1')$ este un majorant al lui

$$| \int_0^\infty x_t y_t d < M, N >_t |$$

Ultimul membru din şirul de inegalităţi $(1')$ este

$$(\int_0^\infty x_t^2 d < M, M >_t)^{\frac{1}{2}} (\int_0^\infty y_t^2 d < N, N >_t)^{\frac{1}{2}}$$

Deci

$$(2)\ | \int_0^\infty X_t Y_t d < M, N >_t | \leq (\int_0^\infty X_t^2 d < M, M >_t)^{\frac{1}{2}} (\int_0^\infty Y_t^2 d < N, N >_t)^{\frac{1}{2}}$$

oricare ar fi X, Y de tipul particular de mai sus .

3) Pentru comoditate, intoducem notaţia $\alpha := | < M, N > |$, adică variaţia lui $< M, N >$. Este uşor de verificat folosind exerciţiul 4.1 că avem a.s. îndeplinite inegalităţile

$$\alpha_t(\omega) - \alpha_s(\omega) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} [(< M, M >_t - < M, M >_s) + (< N, N >_t - < N, N >_s)],$$

oricare ar fi $s, t \in \mathbf{R}_+$ cu $s < t$. Din această inegalitate rezultă că măsurile $P\alpha$ şi $P < M, N >$ (vezi notaţia introdusă la începutul paragrafului 2.2) sunt absolut continue de $P(< M, M > + < N, N >)$. Fie (X^n) şi (Y^n) şiruri etajate pe algebra $\mathcal{C}$(vezi propoziţia 1.14) care converg în $L_2(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{P},$

$P(<M,M>+<N,N>))$ la X şi Y, respectiv. Aplicînd (2) şi integrînd membru cu membru, se obţine :

$$|E\int_0^\infty X_t^n Y_t^n d<M,N>_t| \leq$$

$$\leq (E\int_0^\infty (X_t^n)^2 d<M,M>_t)^{\frac{1}{2}}(E\int_0^\infty (Y_t^n)^2 d<N,N>_t)^{\frac{1}{2}}$$

(membrului drept din (2) i s-a aplicat şi un Holder în $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$,iar membrul stîng a fost minorat, scoţîndu-se modulul înafara lui E). Se face $n\to\infty$ şi se obţine inegalitatea

$$(3)|E\int_0^\infty X_t Y_t d<M,N>_t| \leq$$

$$\leq (E\int_0^\infty X_t^2 d<M,M>_t)^{\frac{1}{2}}(E\int_0^\infty Y_t^2 d<N,N>_t)^{\frac{1}{2}}$$

3) La acest punct vom trece în (3) de la $d<M,N>_t$,la $d|<M,N>|_t$. Măsura $P<M,N>$ este absolut continuă de $P\alpha$. Restrîngîndu-le pe ambele la $\sigma-$ algebra $\mathcal{P}$, rezultă că există Z, proces previzibil (cu valori în {-1,1}), astfel încît

$$P<M,N>|_{\mathcal{P}} = Z(P\alpha)|_{\mathcal{P}}$$

Se aplică (3) lui X şi ZY.

In final observăm că inegalitatea de la a) este adevărată oricare ar fi X şi Y previzibili .

Raţionamentul pentru b) este analog.

4.2 Integrale stocastice

Fie $f:\bar{\mathbf{R}}_+\to\mathbf{R}$ definită astfel : dacă $0=t_0<t_1<t_2<...<t_n<t_{n+1}=\infty$ şi $f_0,f_1,...f_n\in\mathbf{R}$, atunci

$$f(t)=f_0\mathbf{1}_{\{0\}}(t)+\sum_{i=1}^n f_i\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t),\ t\in\bar{\mathbf{R}}_+$$

Fie $g : \bar{\mathbf{R}}_+ \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă la dreapta cu limite finite la stînga. Definim

$$(1) \int_0^\infty f dg = f(0)g(0) + \sum_{i=0}^{n} f_i[g(t_{i+1)} - g(t_i)] \text{ şi}$$

$$(2) \int_0^t f dg = \int_0^\infty f \, \mathbf{1}_{[0,t]} dg = f(0)g(0) + \sum_{i=0}^{n} f_i[g(\min(t_{i+1}, t) - g(\min(t_i, t)]$$

Funcţia

$$t \to \int_0^t f dg$$

nu depinde de reprezentarea lui f, este continuă la dreapta, cu limite finite la stînga, iar saltul ei t este $f(t)\Delta g(t)$,adică

$$(3) \; \Delta(\int_0^t f dg) = f(t)\Delta g(t)$$

Fie

$$(4) \; \Lambda = \{H \; | H = h_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \; t \in \bar{\mathbf{R}}_+, 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = \infty, h_i : \Omega \to \mathbf{R}, \mathcal{F}_{t_i} - \text{măsurabilă şi mărginită}, \; n \in \mathbf{N}\}$$

şi fie $M \in \mathcal{M}$.

Propoziţia 4.4 *Procesul $H.M$, definit prin*

$$(5) \; (H.M)_t(\omega) = \int_0^t H_s(\omega) dM_s(\omega)$$

este martingal de pătrat integrabil,

$$(6) \; \Delta(H.M)_t = H_t \Delta M_t$$

şi are loc egalitatea

$$(7) \; E((H.M)^2_\infty) = E \int_0^\infty H^2_s d < M, M >_s = E \int_0^\infty H^2_s d[M, M]_s$$

Comentarii In (7) am notat $E(.) = E. =: \int .dP$ (vezi pag.96)

Deasemenea, folosind notaţia introdusă la începutul paragrafului 2.2, relaţia (7) se poate scrie şi sub forma :

$$(8)\ E((H.M)^2_\infty) = P < M, M > (H^2) = P[M, M](H^2)$$

Demonstraţie Fie $s, t \in \mathbf{R}_+$, cu $s < t$. Se poate presupune (renumerotînd, eventual, punctele partiţiei din expresia lui H) că $s = t_j$ şi $t = t_{k+1}$, cu $j < k+1$. Integrabilitatea funcţiei

$$\omega \to \int_0^t H_s(\omega) dM_s(\omega)$$

pentru orice t este evidentă şi avem

$$E(\int_0^t H_u dM_u | \mathcal{F}_s) = E(\int_0^s H_u dM_u | \mathcal{F}_s) + E(\sum_{i=j}^k h_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) | \mathcal{F}_s)$$

Dar

$$E(\sum_{i=j}^k h_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) | \mathcal{F}_s) = \sum_{i=j}^k E[E(h_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_i}) | \mathcal{F}_s] =$$

$$= \sum_{i=j}^k E[h_i E(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_i}) | \mathcal{F}_s] = 0$$

Am folosit $\mathcal{F}_{t_i}$−măsurabilitatea lui h_i, pentru $i = j, ..., k$ şi faptul că M este martingal. S-a demonstrat că $H.M$ este martingal.

Afirmaţia (6),relativă la salturile lui $H.M$ este evidentă din (3).

Egalităţile (7) se verifică prin calcul direct :

$$E((H.M)^2_\infty) = E[h_0 M_0 + \sum_{i=0}^n h_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})]^2 =$$

$$= E[h_0^2 M_0^2 + \sum_{i=0}^n h_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2] = E(h_0^2 < M, M >_0) +$$

$$+ \sum_{i=0}^n E[h_i^2 (< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i})] = E[(h_0^2 < M_0, M_0 > +$$

$$+\sum_{i=0}^{n}[h_i^2(< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i})] = E\int_0^\infty H_s^2 d < M, M >_s$$

Am folosit faptul că, pentru $0 \leq i < j \leq n$, avem

$$\begin{aligned} & E[h_i h_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})] = \\ = \ & E\{E[h_i h_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})|\mathcal{F}_{t_j}]\} = \\ = \ & E\{h_i h_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) E[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})|\mathcal{F}_{tj}]\} = 0, \end{aligned}$$

pentrucă $E[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})|\mathcal{F}_{tj}] = 0$, M fiind martingal.

Deasemenea, am folosit egalitatea

$$E[h_i^2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2] = E[h_i^2(< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i})]$$

care rezultă prin raţionamente standard din propoziţia 3.2 : într-adevăr, pentru $h_i = \mathbf{1}_A$, cu $A \in \mathcal{F}_{t_i}$,egalitatea este această propoziţie pentru opţionalele $S = (t_i)_A$ şi $T = (t_{i+1})_A$(se ţine cont de definiţiile 1.5 şi 4.1), ş.a.m.d.

Ultima egalitate rezultă din faptul că $P([M, M]- < M, M >)$ este nulă pe previzibile (propoziţia 4.1 b).

Propoziţia este demonstrată.

Să observăm că Λ este subspaţiu liniar al lui $L_2(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{P}, P < M, M >)$, aplicaţia

$$(9) \ H \to H.M : \Lambda \to \mathcal{M}$$

este liniară şi prima egalitate (8) , afirmă că ea păstrează norma, deci este izometrie între Λ,înzestrat cu norma lui de subspaţiu al lui $L_2(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{P}, P < M, M >)$ şi $\mathcal{M}$ înzestrat cu norma lui $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = L_2(\mathcal{F}) \equiv \mathcal{M}$.

Fie

$$(10) \ L_2(M) := L_2(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{P}, P < M, M >)$$

Teorema 4.2 *Aplicaţia (9) se extinde unic la $L_2(M)$. ca o aplicaţie liniară şi continuă .*

Ea rămîne o izometrie, adică

$$(11) \ E((H.M)_\infty^2)) = E\int_0^\infty H^2 d < M, M > dP$$

oricare ar fi $H \in L_2(M)$.

Pentru orice $t \in \mathbf{R}_+$ avem

$$(12) \ \Delta(H.M)_t = H_t \Delta M_t \ a.s.$$

Demonstraţie Algebra $\mathcal{C}$ introdusă prin egalitatea (3) din propoziţia 1.14, genereazǎ previzibilele. Se ştie din Teoria Masurii (vezi [5], de exemplu) că funcţiile simple , etajate chiar pe $\mathcal{C}$ sunt dense în $L_2(\Omega\times\mathbf{R}_+,\mathcal{P},P < M,M >)$. Deoarece

$$\{\mathbf{1}_A | A\in\mathcal{C}\} \ \subset\Lambda$$

rezultă că subspaţiul Λ este dens în $L_2(M)$.

Aplicaţia (9) se extinde unic la $L_2(M)$ ca o aplicaţie liniara şi continuă.

Fie $(H_n)\subset\Lambda$, un şir de procese cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty}\int|H-H_n|^2dP<M,M>)=0$$

Relaţia (11) se obţine scriind (7) pentru H_n şi făcînd $n\to\infty$,deci

$$H\to H.M : L_2(M)\to\mathcal{M}$$

rămîne izometrie.

Relaţia (12) este verificată pentru $H\in\Lambda$ (vezi (6)). Fie

$$\mathcal{H}=\{H|H \text{ previzibil, mărginit, } H \text{ verifică } (11)\}$$

Mulţimea $\mathcal{H}$ are următoarele proprietăţi :

1) este spaţiu liniar

2) $\mathbf{1}_\Omega\in\mathcal{H}$

3) dacă $0\le H_1\le H_2\le ...\le H_n\le ...$este un şir în $\mathcal{H}$ cu $\lim_{n\to\infty}H_n=H$ mărginit, atunci H verifică (11).

4) $\mathcal{H}\supset\Lambda$ şi Λ este stabilă la înmulţire .

Dintre acestea numai 3) este netrivială . Avem $H=\lim_{n\to\infty}H_n$în $L_2(M)$,deci $H.M=\lim_{n\to\infty}H_n.M$, în $\mathcal{M}\equiv L_2(\mathcal{F})$. Teorema 3.3 ne asigură că există un subşir $(H_{n_k})_{k\ge1}$, astfel încît aproape sigur în raport cu P,traiectoriile lui $H_{n_k}.M$ să conveargă uniform la traiectoriile lui $H.M$. Făcînd $k\to\infty$ în relaţia :

$$(H_{n_k}.M)_t-(H_{n_k}.M)_{t-}=H_{n_k}(M_t-M_{t-})$$

se obţine, pe baza convegenţei uniforme, valabilitatea ei pentru H.

Aplicînd o teoremă de clasă monotonă (vezi [13],Theorem 8, pag7) rezultă

$$\mathcal{H}\supset\{H|H \text{ mărginit, } H \text{ măsurabil în raport cu } \sigma(\Lambda)\}$$

Dar $\sigma(\Lambda) = \mathcal{P}$, conform propoziţiei 1.14, deci egalitatea (12) este adevărată pentru orice H previzibil şi mărginit. Valabilitatea ei pentru un H arbitrar din $L_2(M)$, se obţine aplicînd încă o dată Teorema 3.3 pentru un şir obţinut din H prin trunchiere, care converge atît în $L_2(M)$ cît şi punctual la H.

Teorema este demonstrată.

Următorul corolar enumeră proprietăţile curente, folosite în calcule cu integrale stocastice, care rezultă din cele de mai sus.

Corolarul 4.1 *a) Fie $M \in \mathcal{M}$. Aplicaţia*

$$H \to H.M : L_2(M) \to \mathcal{M}$$

are următoarele proprietăţi :

1) $(H + K).M = H.M + K.M$, oricare ar fi $H, K \in L_2(M)$.

2) $(\alpha H).M = \alpha(H.M)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}_+$ şi $H \in L_2(M)$.

3) $H_n \to H$ în $L_2(M) \Rightarrow H_n.M \to H.M$ în $\mathcal{M}$ şi există un subşir de numere naturale (n_k) astfel încît aproape toate traiectoriile lui $H_{n_k}.M$ să tindă uniform la traiectoriile lui $H.M$, adică :

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in\mathbf{R}_+} |(H_{n_k}.M)(\omega,t) - (H.M)(\omega,t)| = 0$$

pentru $\omega \notin \Lambda$,cu $P(\Lambda) = 0$.

b) Fie H un proces previzibil mărginit. Aplicaţia

$$M \to H.M : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

are următoarele proprietăţi :

1) $H.(M + N) = H.M + H.N$, oricare ar fi $M, N \in \mathcal{M}$.

2) $H.\alpha M = \alpha H.M$, oricare ar fi $M \in \mathcal{M}$ şi $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

3) $M_n \to M$ în $\mathcal{M} \Rightarrow H.M_n \to H.M$ în $\mathcal{M}$ şi există un subşir de numere naturale (n_k) astfel încît aproape toate traiectoriile lui $H.M_{n_k}$ să tindă uniform la traiectoriile lui $H.M$, adică :

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in\mathbf{R}_+} |(H.M_{n_k})(\omega,t) - (H.M)(\omega,t)| = 0$$

pentru $\omega \notin \Lambda$,cu $P(\Lambda) = 0$.

`Demonstraţie` Afirmaţiile relative la convergenţa uniformă sunt aplicaţii ale teoremei 3.3 şi ale faptului că în urma identificării lui $\mathcal{M}$ cu L_2, convergenţa în $\mathcal{M}$ este convergenţa în L_2.

Demonstraţia lui 3) de la b) este următoarea :

$$E[(H.M_n)_\infty - (H.M)_\infty]^2 = E[(H.(M_n - M))_\infty]^2 =$$

$$= E(\int_0^\infty Hd < M_n - M >) \leq \sup_{t,\omega} |H(t,\omega)| E[(M_n)_\infty - M_\infty)]^2.$$

Teorema următoare dă o caracterizare intrinsecă a integralei stocastice.

Teorema 4.3 *Fie $M \in \mathcal{M}$ şi $H \in L_2(M)$. Atunci pentru orice $N \in \mathcal{M}$, avem*

$$a)\ E\int_0^\infty |H| d| < M, N > | < \infty \text{ şi } E\int_0^\infty |H| d\ |[M,N]| < \infty$$

Integrala stocastică a lui H în raport cu M, $H.M$, este unicul element din $\mathcal{M}$ cu proprietatea

$$b) E[(H.M)_\infty N_\infty] = E\int_0^\infty H_s d < M, N >_s = E\int_0^\infty H_s d\ [M,N]_s,$$

oricare ar fi $N \in \mathcal{M}$.

Au loc relaţiile

$$c) < H.M, N > \ = H. < M, N >,$$

$$d)\ [H.M, N] = H.\ [M,N],$$

şi valabilitatea fiecăreia dintre ele pentru orice $N \in \mathcal{M}$, caracterizează pe $H.M$ în $\mathcal{M}$.

Dacă

$$M = M^c + M^d$$

unde $M^c \in \mathcal{M}_c$ şi $M^d \in \mathcal{M}_d$, atunci componentele analoage ale lui $H.M$ sunt

$$e)\ (H.M)^c = H.M^c, (H.M)^d = H.M^d$$

Demonstraţie Mai întîi menţionăm că în relaţiile de la c) şi d), membrii din dreapta sunt integrale stocastice Stieltjes (paragraful 2.5).

Finitudinea integralelor din enunţ rezultă din inegalităţile Kunita-Watanabe (teorema 4.1). Intr-adevăr, alegînd $K = 1$ în această inegalitate, se obţine

$$E\int_0^\infty |H||d < M,N>| \le (E\int_0^\infty |H|^2 d<M,M>)^{\frac{1}{2}}(E\int_0^\infty d<N,N>)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= (E\int_0^\infty |H|^2 d<M,M>)^{\frac{1}{2}}[E(N_\infty^2)]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Analog se demonstrează şi finitudinea celei de a doua integrale.

Să demonstrăm b). Mai întîi observăm că este suficient să stabilim prima egalitate, cea de a doua rezultînd din faptul că $P([M,N] - <M,N>)$ este nulă pe previzibile (propoziţia 4.2f))

Fie $N \in \mathcal{M}$ fixat. Construim $T : L_2(M) \to R$ prin egalitatea

$$T(H) = E[(H.M)_\infty N_\infty - \int_0^\infty H_s d<M,N>_s), H \in L_2(M)$$

Funcţia T este evident liniară . Ea este şi mărginită, după cum rezultă din evaluarea de mai jos, în care se folosesc Schwartz şi Kunita -Watanabe :

$$|T(H)| \le ||(H.M)_\infty||||N_\infty|| + (E\int_0^\infty H_s^2 d<M,M>_s)^{\frac{1}{2}}||N_\infty||,$$

Dar

$$(E\int_0^\infty H_s^2 d<M,M>_s)^{\frac{1}{2}}$$

este norma lui H în $L_2(M)$ şi pe baza lui izometriei (11),

$$|T(H)| \le 2(E\int_0^\infty H_s^2 d<M,M>_s)^{\frac{1}{2}}||N_\infty||.$$

Vom arăta acum că T este nulă pe Λ (definită prin relaţia (4) la începutul acestui paragraf). Fie

$$H_t = h_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^n h_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), t \in \mathbf{R}_+$$

unde $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < \infty$ şi $h_i : \Omega \to \mathbf{R}$ sunt v.a.$\mathcal{F}_{t_i}-$ măsurabile, pentru $i = 0, 1, ..., n$. Dacă facem nişte calcule standard cu valori medii condiţionate obţinem

$$\int (H.M)_\infty N_\infty dP = \int [h_0 M_0 + \sum_{i=0}^{n} h_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})] N_\infty dP$$
$$= \int h_0 M_0 N_0 dP + \sum_{i=0}^{n} \int h_i (M_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} - M_{t_i} N_{t_i}) dP.$$

In calculele de mai jos luăm un termen al sumei şi punem în evidenţă faptul că $MN- < M, N >$ este martingal

$$\int h_i (M_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} - M_{t_i} N_{t_i}) dP = \int h_i E(M_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} - < M, N >_{t_{i+1}} |\mathcal{F}_{t_i})+$$
$$+\int h_i [E(< M, N >_{t_{i+1}} |\mathcal{F}_{t_i}) - M_{t_i} N_{t_i})] dP = \int h_i (M_{t_i} N_{t_i} - < M, N >_{t_i})+$$
$$+\int h_i [E(< M, N >_{t_{i+1}} |\mathcal{F}_{t_i}) - M_{t_i} N_{t_i})] dP =$$
$$= \int h_i [E(< M, N >_{t_{i+1}} - < M, N >_{t_i}) |\mathcal{F}_{t_i}).$$

Avem

$$\int (H.M)_\infty N_\infty dP = \int [H_0 < M, N >_0 +$$
$$+\sum_{i=0}^{n} h_i (< M, N >_{t_{i+1}} - < M, N >_{t_i})] dP = E(\int_0^\infty H d < M, N >)$$

Fiind nulă pe Λ (densă în $L_2(M)$),aplicaţia T este nulă pe $L_2(M)$ şi relaţia a) este demonstrată.

Ea caracterizează pe $H.M$: dacă alt $L \in \mathcal{M}$ ar verifica-o, am avea

$$E(L_\infty N_\infty) = E((H.M)_\infty N_\infty), \text{ oricare ar fi } N_\infty \in L_2,$$

de unde $L_\infty = (H.M)_\infty$ şi atunci şi martingalele generate de aceste funcţii coincid.

Să demonstrăm c). Fie

$$L_t = (H.M)_t \text{ şi } J_t = L_t N_t - \int_0^t H_s d < M, N >_s$$

Dacă vom arăta că J este martingal nul în origină, din unicitatea lui $< L, N >$ (propoziţia 4.2 b) , va rezulta relaţia de la c).

Intr-adevăr, notînd $L^*(\omega) = \sup_{0\leq t} |L_t(\omega)|$, $N^*(\omega) = \sup_{0\leq t} |N_t(\omega)|$ din propoziţia 3.5 se ştie că L^*, $N^* \in L_2$. Rezultă

$$|J_t| \leq L^* N^* + \int_0^\infty |H_s|d| < M, N >_s | \in L_1$$

unde integrabilitatea integralei rezultă din a).

Pentru a arăta că J este martingal se va aplica lema2.3.Putem calcula

$$\begin{aligned}
E(J_T) &= E((H.M)_T N_T - \int_0^T H_s d < M, N >_s) = \\
&= E((H.M)_\infty N_T - \int_0^\infty H_s d < M, N >_s^T) = \\
&= E((H.M)_\infty N_\infty^T - \int_0^\infty H_s d < M, N^T >_s) = 0
\end{aligned}$$

Am folosit propoziţia 4.3 şi punctul b).

Să demonstrăm acum că relaţia c) caracterizează pe $H.M$. Dacă se scrie c) la momentul $t = \infty$ şi se integrează membru cu membru în rapot cu P şi dacă se ţine seama de faptul că $E(< H.M, N >_\infty) = E((H.M)_\infty N_\infty)$, se obţine prima relaţie b). Deci dacă aceasta îl caracteriza pe $H.M$, atunci şi c) îl caracterizează.

Vom demonstra acum e). Are loc egalitatea

$$H.M = H.M^c + H.M^d$$

Dar $H.M^c \in \mathcal{M}^c$, deoarece $\Delta(H.M^c)_t = H_t \Delta M_t^c = 0$. Pe de altă parte $H.M^d \in \mathcal{M}^d$: fie $K \in \mathcal{M}^c$. Tinînd cont de c), avem

$$< H.M^d, K > \ = H. < M^d, K > \ = 0.$$

In final, revenim la d).

$$\begin{aligned}
[H.M, N]_t &= \ < (H.M)^c, N^c >_t + \sum_{s\leq t} \Delta(H.M)_s \Delta N_s = \\
&= \ < H.M^c, N^c >_t + \sum_{s\leq t} H_s \Delta M_s \Delta N_s = \\
&= (H. < M^c, N^c >)_t + \sum_{s\leq t} H_s \Delta M_s \Delta N_s = (H.[M, N])_t.
\end{aligned}$$

Demonstraţia faptului că d) îl caracterizează pe $H.M$ se face analog cu demonstraţia faptului că c) îl caracterizează pe $H.M$

Teorema 4.4 *Fie $M \in \mathcal{M}$, $H \in L_2(M)$ şi K un proces previzibil mărginit. Atunci $KH \in L_2(M)$ şi are loc egalitatea*

$$(KH).M = K.(H.M)$$

`Demonstraţie` Mai întîi vom arăta că $KH \in L_2(M)$.

$$E(\int_0^\infty (K_sH_s)^2 d < M,M >_s) \le \sup_{s,\omega} |K_s(\omega)|^2 E(\int_0^\infty {H_s}^2 d < M,M >_s) < \infty$$

Egalitatea va rezulta din faptul că relaţia c) din teorema 4.3 caracterizează integrala stocastică. Va trebui să arătăm că oricare ar fi $N \in \mathcal{M}$, avem

$$< K.(H.M), N > \; = (KH). < M, N > .$$

Intr-adevăr, aplicînd tot teorema 4.3 c) de două ori avem

$$< K.(H.M), N > \; = K. < H.M, N > \; = (KH). < M, N > .$$

Propoziţia 4.5 *Dacă $M \in \mathcal{M}$ şi T un timp de stopare, rezultă că $\mathbf{1}_{[0,T]} \in L_2(M)$ şi*

$$\mathbf{1}_{[0,T]}.M = M^T.$$

`Demonstraţie` Conform teoremei 4.3 c), va fi suficient să arătăm că oricare ar fi $N \in \mathcal{M}$, are loc egalitatea

$$< M^T, N > \; = \; \mathbf{1}_{[0,T]}. < M, N >$$

Intr-adevăr , valoarea integralei stocastice Stieltjes din membrul drept este $< M, N >^T$,iar egalitatea cu membrul stîng rezultă din propoziţia 4.3.

Propoziţia 4.6 *Fie $\mathcal{S}$ este un subspaţiu închis al lui $\mathcal{M}$. Atunci $\mathcal{S}$ este opţional stabil, dacă şi numai dacă oricare ar fi $M \in \mathcal{S}$ şi $H \in L_2(M)$, avem $H.M \in \mathcal{S}$.*

Demonstraţie Implicaţia "dacă " este corolarul propoziţiei anterioare, alegînd o opţională T, şi $H = \mathbf{1}_{[0,T]}$.

Cealaltă implicaţie se demonstrează arătînd că $H.M \in \mathcal{S}^{\perp\perp}$, îndată ce $M \in \mathcal{S}$ şi $H \in L_2(M)$. Intr-adevăr, fie $N \in \mathcal{S}^{\perp}$. Folosind din nou teorema 4.3 c), avem

$$< H.M, N > \ = H. < M, N > \ = 0.$$

Corolarul 4.2 *Fie $M \in \mathcal{M}$ şi*

$$\mathcal{S}_M = \{H.M \mid H \in L_2(M)\}$$

Atunci $\mathcal{S}_M$ este cel mai mic subspaţiu opţional stabil ce îl conţine pe M.

Demonstraţie Mai întîi sa observăm că $\mathcal{S}_M$ este subspaţiu opţional stabil. Intr-adevăr, este spaţiu liniar închis, deorece aplicaţia liniară $H \to H.M : L_2(M) \to \mathcal{M}$ este izometrie. Este opţional stabil , pentrucă dacă aleg un proces K,previzibil şi mărginit (ar fi suficient să aleg $K = \mathbf{1}_{[0,T]}$) aplicînd teorema 4.4 se obţine $K.(H.M) = (KH).M$ şi acest ultim proces este evident în $\mathcal{S}_M$.

Fie $\mathcal{S}'$ intersecţia tuturor subspaţiilor opţional stabile cel conţin pe M. Printre acestea este şi $\mathcal{S}_M$; aceasta rezultă din cele de mai sus şi deoarece $M = \mathbf{1}_{\Omega\times\mathbf{R}_+}.M \in \mathcal{S}_M$.Deci are loc relaţia

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}_M$$

Incluziune inversă rezultă din propoziţia 4.6.

Propoziţia 4.7 *Dacă M, $N \in \mathcal{M}$, proiecţia lui N pe $\mathcal{S}_M$ este de forma $D.M$, unde D este o densitate previzibilă a lui $< M, N >$ în raport cu $< M, M >$. Relaţia*

$$< M, N > \ = D. < M, M >$$

îl caracterizează pe D (ca element în $L_2(M)$).

Demonstraţie Presupunem $N = N' + N''$ cu $N' \in \mathcal{S}_M$ şi $N'' \in \mathcal{S}_M^{\perp}$. Rezultă că există $D \in L_2(M)$, astfel încît $N' = H.M$. Are loc egalitatea

$$< N, M > \ = \ < N', M > \ = \ < D.M, M > \ = \ D. < M, M >$$

Dacă $\tilde{D}$ este un alt proces previzibil verificînd

$$< M, N > = \tilde{D}. < M, M >,$$

atunci $D = \tilde{D}$ aproape peste tot în raport cu măsura generată de $< M, M >$,deci

$$E(\int (D_s - \tilde{D}_s)^2 d < M, M >_s) = 0$$

de unde rezultă că $\tilde{D} \in L_2(M)$ şi $D = \tilde{D}$ aproape peste tot în raport cu $P < M, M >$.

Incheiem acest paragraf stabilind legătura dintre integrala definită în acest paragraf şi integrala stocastică Stieltjes, definită în ultimul paragraf al capitolului precedent. Reamintim că $\mathcal{V}_\mathcal{I}$ era mulţimea proceselor VI(definiţia 2.3).

Propoziţia 4.8 *Fie* $M \in \mathcal{M} \cap \mathcal{V}_\mathcal{I}$ *şi* $H \in L_2(M) \cap L_1(P|M|)$. *Atunci,*

$$H.^s M = H.M \ ,$$

unde membrul stîng este integrala stocastică Stieltjes a lui H în raport cu M.

Demonstraţie Se ştie (teorema 2.10) că $H.^s M$ este un martingal VI, deci aplicînd propoziţia 2.4, pentru orice martingal mărginit N, avem

$$E[(H.^s M)_\infty N_\infty] = E(\sum_{t\geq 0} \Delta(H.^s M)_t \Delta N_t) = E(\sum_{t\geq 0} H_t \Delta M_t \Delta N_t)$$

Pe de altă parte din corolarul 3.6 rezultă că $M \in \mathcal{M}^d$,deci şi $H.M \in \mathcal{M}^d$(propoziţia 4.6) şi aplicînd teorema 3.9 şi apoi teorema 4.2 (relaţia (12)), putem scrie

$$E[(H.M)_\infty N_\infty] = E(\sum_{t\geq 0} \Delta(H.M)_t \Delta N_t) = E(\sum_{t\geq 0} H_t \Delta M_t \Delta N_t).$$

Va rezulta

$$E[(H.^s M)_\infty N_\infty] = E[(H.M)_\infty N_\infty].$$

Deoarece N_∞ este o v.a. mărginită arbitrară, obţinem

$$(H.^s M)_\infty = (H.M)_\infty, \text{ deci } H.^s M = H.M \ .$$

In continuare ne vom referi la integrala stocastică Stieltjes care este o integrală Stieltjes pe traiectorii, sub denumirea de "integrală Stieltjes", păstrînd denumirea de "integrală stocastică" pentru integrala în raport cu un martingal introdusă în acest paragraf. Propoziia anterioară ne spune că cazul cînd martingalul integrator este şi proces VI se poate folosi oricare dintre aceste denumiri.

4.3 Formula de schimbare de variabilă

Definiţia 4.4 *Se numeşte semimartingal (în sens restrîns), un proces de forma*

$$(1)\ X_t = X_0 + M_t + A_t$$

unde X_0 *este o v.a. integrabilă şi* $\mathcal{F}_0-$ *măsurabilă,* $M \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{V}_\mathcal{I}$, *cu* $M_0 = 0 = A_0$ *a.s.*

Am pus în paranteză *"în sens restrîns"* deoarece acesta este un caz particular de semimartingal (vezi [12], pag. 32). In acest paragraf vom lucra numai cu acest caz particular, şi de aceea vom folosi termenul de *"semimartingal"* pentru a desemna de fapt un *"semimartingal în sens restrîns"*. Extensia acestei formule pentru procese mai generale presupune tratarea acestui caz separat şi se face fără dificultăţi majore, prin procedee de localizare.

Reprezentarea de mai sus pentru X nu este unică , deoarece există martingale în $\mathcal{M}$ care sunt şi procese VI (vezi teorema 2.6).Totuşi are loc următoarea propoziţie.

Propoziţia 4.9 *Fie* X *un semimartingal de forma (1). Proiecţia lui* M *pe* $\mathcal{M}^c$ *nu depinde de reprezentarea (1).*

`Demonstraţie` Presupunem că X se mai scrie sub forma

$$(2)\ X_t = X_0 + N_t + B_t,\ t \geq 0$$

unde $N = (N_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}$, $B = (B_t)_{t\geq 0}$ este proces VI şi $B_0 = N_0 = 0$. Rezultă

$$(3)\ M - N = B - A$$

şi $M - N \in \mathcal{M}$ şi este şi proces VI. Din corolarul 3.6 rezultă că $M - N$ este pur discontinuu, şi are proiecţie nulă pe $\mathcal{M}^c$, adică $(M-N)^c = 0$, sau $M^c = N^c$.

Definiţia 4.5 *Dacă* X *este un semimartingal de forma* (1) , *fie*

$$X^c := M^c$$

şi

$$[X,X]_t := \ < X^c, X^c >_t + \sum_{s\leq t} \Delta X_s^2$$

Procesul $[X, X]$ este crescător, continuu la dreapta şi deoarece

$$(4)\ \Delta X_s^2 \leq 2(\Delta M_t^2 + \Delta A_t^2)$$

rezultă că $[X, X]_\infty$ este finită a.s.

Definiţia 4.6 *Dacă X este semimartingalul (1) şi H este un proces previzibil mărginit, definim*

$$(H.X)_t := H_0X_0 + (H.M)_t + (H.A)_t, \ \textit{pentru } t \in [0, \infty)$$

şi o numim integrala stocastică a lui H în raport cu X.

`Comentarii.` In definiţia de mai sus, $H.M$ este integrală stocastică, iar $H.A$ este integrală Stieltjes . Definiţia este corectă deoarece dacă X are şi expresia (2), din egalitatea (3) şi propoziţia 4.8 rezultă

$$H.(M - N) = H.(A - B)$$

unde în stînga am integrală stocastică iar în dreapta integrală Stieltjes. Din această relaţie rezultă

$$H.M + H.A = H.N + H.B$$

Teorema următoare este extensia formulei Ito în cazul unui semimartingal real, pentru care componenta de tip martingal nu este neapărat continuă.

Teorema 4.5 *Fie X un semimartingal şi F o funcţie reală de variabilă reală cu derivate de primele două ordine continue şi mărginite. Pentru orice $t \in$ $\mathbf{R}_+$, are loc egalitatea*

$$(5)\ F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_{s-})d < X^c, X^c >_s +$$

$$+ \sum_{0<s\leq t} [F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s], a.s.,$$

seria din membrul drept fiind absolut convergentă.

Comentarii Prima integrala este integrala unui proces previzibil mărginit în raport cu un semimartingal (definiţia 4.6). A doua este o integrală Stieltjes, şi din cauza continuităţii traiectoriilor lui $< X^c, X^c >$, integrandul poate fi înlocuit cu $F''(X_s)$. Seria care apare în formulă este absolut convergentă datorită inegalităţii

$$\sum_{0<s\leq t} [F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s) \leq \frac{C}{2} \sum_{0<s\leq t} (\Delta X_s)^2$$

care rezultă din formula Taylor aplicată lui $F(X_s)$. In membrul drept, C este un majorant al lui $|F''|$. Seria majorantă este convergentă a.s. din cauza inegalităţii (4) şi a ipotezelor făcute asupra lui M şi A.

Demonstraţie Vom reduce demonstraţia formulei (5) în cazul general, la demonstrarea ei pentru nişte cazuri particulare. Vom parcurge mai multe etape :

I) In prima etapă vom demonstra că dacă formula este adevărată pentru $Y_0 + N + B$,unde Y_0 parcurge o mulţime densă în $L_1(\mathcal{F}_0), N$ parcurge o mulţime densă în $\mathcal{M}$ şi B parcurge o mulţime densă în $\mathcal{V}_\mathcal{I}$, atunci ea este adevărată în general.

Fie (Y_0^n) un şir de funcţii în $L_1(\mathcal{F}_0)$,fie (N^n) un şir de martingale în $\mathcal{M}$ cu $N_0^n = 0$ şi fie (B^n) un şir de procese VI cu $B_0^n = 0$,astfel încît

$$(6) \sum_n E|Y_0^n - X_0| < \infty, \ \sum_n ||N_\infty^n - M_\infty|| < \infty \ \text{ şi } \sum_n ||B^n - A||_v < \infty.$$

(reamintim că $||.||$ este norma în $L_2(\mathcal{F})$, iar

$$||B^n - A||_v = \int |B^n - A|_\infty dP = E(|B^n - A|_\infty)$$

conform definiţiei 2.3)

Vom demonstra că dacă formula este adevărată pentru

$$Y_t^n = Y_0^n + N_t^n + B_t^{n\prime},$$

atunci este adevărată pentru

$$X_t = X_0 + M_t + A_t.$$

Vom presupune deci că

$$(7)\ F(Y_t^n) = F(Y_0^n) + \int_0^t F'(Y_{s-}^n)dY_s^n + \frac{1}{2}\int_0^t F''(Y_{s-}^n)d < Y^{nc}, Y^{nc} >_s + \\ + \sum_{0<s\leq t}[F(Y_s^n) - F(Y_{s-}^n) - F'(Y_{s-}^n)\Delta Y_s^n]$$

Vom arăta că atunci cînd $n \to \infty$, termenii din (7) tind (a.s. sau în probabilitate) la termenii corespunzători din (5).

Din prima dintre relaţiile (6) rezultă că $Y_0^n \to X_0$ în L_1 şi a.s., deci $F(Y_0^n) \to F(X_0)$ a.s.

Din celelalte două dintre relaţiile (6), rezultă analog că $Y_t^n \to X_t$ în L_1 şi a.s. Din inegalitate normelor a lui Doob (vezi demonstraţia teoremei 3.4), rezultă că există un Λ cu $P(\Lambda) = 0$,astfel încît pentru $\omega \notin \Lambda$, să avem

$$(8)\ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} |N_t^n(\omega) - M_t(\omega)| = 0.$$

Datorită inegalităţii

$$(9)\ \sup_{t\in[0,\infty)} |B_t^n - A_t| \leq |B^n - A|_\infty$$

şi a ultimei din ipotezele de la (6), putem presupune şi că

$$(10)\ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} |B_t^n(\omega) - A_t(\omega)| = 0,$$

dacă $\omega \notin \Lambda$.Va rezulta că aproape sigur, traiectoriile lui Y^n converg uniform la cele ale lui X. Pentru $\omega \notin \Lambda$,avem

$$(11)\ \lim_{n\to\infty} Y_{t-}^n = X_{t-}, \text{ oricare ar fi } t > 0.$$

Vom trece acum la compararea termenilor

$$\int_0^t F'(X_{s-})dX_s \quad \text{şi} \quad \int_0^t F'(Y_{s-}^n)dY_s^n$$

Ţinînd cont de definiţia 4.6, fie

$$I_1^n := \int_0^t F'(Y_{s-}^n)dN_s^n - \int_0^t F'(X_{s-})dM_s = I_{11}^n + I_{12}^n$$

unde

$$I_{11}^n := \int_0^t F'(Y_{s-}^n)dM_s - \int_0^t F'(X_{s-})dM_s$$

şi

$$I_{12}^n := \int_0^t F'(Y_{s-}^n)dN_s^n - \int_0^t F'(Y_{s-}^n)dM_s.$$

În calculul de mai jos notăm cu Y_-^n procesul $(Y_{s-}^n)_{s\geq 0}$ şi folosim notaţia funcţională (vezi (5) din propoziţia 4.4) a integralei stocastice. Avem

$$||I_{11}^n||^2 = E[(F'(Y_-^n) - F'(X_-)).M]_t^2 = E\int_0^t [F'(Y_{s-}^n) - F'(X_{s-})]^2 d < M, M >_s =$$

$$= \int_0^t [F'(Y_{s-}^n(\omega) - F'(X_{s-}(\omega)]^2 d(P < M, M >)(s,\omega).$$

In calculul de mai sus am folosit izometria integralei stocastice . Dar

$$\lim_{n\to\infty}[F'(Y_{s-}^n(\omega) - F'(X_{s-}(\omega)]^2 = 0 \text{ a.s. în raport cu } P < M, M >$$

din cauza lui (11) şi a continuităţii lui F'. Convergenţa este dominată de o constantă, datorită mărginirii lui F' iar $P < M, M >$ este măsură finită. Din teorema convergenţei dominate avem

$$\lim_{n\to\infty} ||I_{11}^n||^2 = 0,$$

deci $\lim_{n\to\infty} I_{11}^n = 0$ şi în probabilitate.

Stabilim analog aceeaşi proprietate şi pentru I_{12}^n. Avem

$$\begin{aligned} ||I_{12}^n||^2 &= E[\int_0^t F'(Y_{s-}^n)d(N_s^n - M_s)]^2 = E[(F'(Y_-^n).(N^n - M))_t]^2 = \\ &= E\int_0^t (F'(Y_{s-}^n))^2 d < N^n - M, N^n - M >_s \leq C_1^2||N_\infty^n - M_\infty||^2 \end{aligned}$$

unde $C_1 = \sup|F'|$. Din ipotezele (6) rezultă $\lim_{n\to\infty} I_{12}^n = 0$, în L_2 deci şi în probabilitate.

Vom arăta acum că

$$I_2^n := \int_0^t F'(Y_{s-}^n)dB_s^n - \int_0^t F'(X_{s-})dA_s$$

tinde la 0 în L_1(deci şi în probabilitate), cînd $n \to \infty$. Intr-adevăr, să scriem

$$I_2^n = I_{21}^n + I_{22}^n$$

unde

$$I_{21}^n := \int_0^t F'(Y_{s-}^n)dB_s^n - \int_0^t F'(Y_{s-}^n)dA_s \text{ şi } I_{22}^n := \int_0^t (F'(Y_{s-}^n) - F'(X_{s-}))dA_s.$$

Avem

$$E(|I_{21}^n|) \leq E\int_0^t |F'(Y_{s-}^n)|d|B^n - A|_s \leq C_1 E(|B^n - A|_\infty) = C_1||B^n - A||_v$$

şi $\lim_{n\to\infty} ||B^n - A||_v = 0$,din (6). Deasemenea,

$$E(|I_{22}^n|) \leq E\int_0^t |F'(Y_{s-}^n) - F'(X_{s-})|d|A|_s$$

şi afirmaţia este adevărată din (11), şi teorema convergenţei dominate care se poate aplica datorită mărginirii lui F' şi integrabilităţii lui $|A|$.

Fie

$$I_3^n = \int_0^t F''(Y_{s-}^n)d < Y^{nc}, Y^{nc} >_s - \int_0^t F''(X_{s-})d < X^c, X^c >_s$$

Din nou descompunem

$$I_3^n = I_{31}^n + I_{32}^n$$

cu

$$\begin{aligned} I_{31}^n &= \int_0^t F''(Y_{s-}^n)d(< Y^{nc}, Y^{nc} >_s - < X^c, X^c >_s) \text{şi} \\ I_{32}^n &= \int_0^t [F''(Y_{s-}^n) - F''(X_{s-})]d < X^c, X^c >_s \end{aligned}$$

Avem $C = \sup|F''| < \infty$ şi

$$E|I_{31}^n| \leq CE\int_0^t d\,| < Y^{nc} + X^c, Y^{nc} - X^c > |_s$$

Dar $Y^{nc} = N^{nc}$, $X^c = M^c$ şi sunt martingale. Aplicînd inegalităţile Kunita-Watanabe (teorema 4.1) obţinem

$$E|I_{31}^n| \leq C||N_\infty^{nc} + M_\infty^c||\ ||N_\infty^{nc} - M_\infty^c||$$

Deorece din (6) rezultă că $\lim_{n\to\infty} ||N_\infty^n - M_\infty|| = 0$ şi proiecţia pe $\mathcal{M}^c$ este continuă, avem $\lim_{n\to\infty} ||N_\infty^{nc} - M_\infty^c|| = 0$ şi trecînd la limită inegalitatea de mai sus, se obţine $\lim_{n\to\infty} I_{31}^n = 0$ în L_1 şi în probabilitate.

Convergenţa lui I_{32}^n la 0 se demonstrează la fel ca cea a lui I_{22}^n.

In final vom arăta că seria din (7) tinde în probabilitate la seria din (5), cînd $n \to \infty$.

In fiecare traiectorie ω,suma

$$(12) \sum_{0<s\leq t} |[F(Y_s^n)-F(Y_{s-}^n)-F'(Y_{s-}^n)\Delta Y_s^n]-[F(X_s)-F(X_{s-})-F'(X_{s-})\Delta X_s]|$$

este o serie numerică pentrucă $\{s \mid \Delta Y_s^n(\omega) \neq 0\}$ este numărabilă. Pentru aproape orice ω,termenul s al ei, tinde la 0 cînd $n \to \infty$.

Aplicînd formula lui Taylor de ordin 2 , această serie este majorată de seria

$$\sum_{0<s\leq t} C[(\Delta Y_s^n)^2 + (\Delta X_s)^2]$$

şi pentru a putea permuta limita cu suma în (12), este suficient să demonstrăm că

$$\sup_n \sum_{0<s\leq t} (\Delta Y_s^n)^2 < \infty, \text{ a.s.}$$

Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că

$$\sup_n \sum_{0<s\leq t} (\Delta N_s^n)^2 < \infty, \text{ a.s. şi } \sup_n \sum_{0<s\leq t} (\Delta B_s^n)^2 < \infty, \text{ a.s.}$$

sau că

$$\sup_n \sum_{0<s\leq t} \Delta(N^n - M)_s{}^2 < \infty, \text{ a.s. şi } \sup_n \sum_{0<s\leq t} \Delta(B^n - A)_s^2 < \infty, \text{ a.s.}$$

Vom arăta că avem, de fapt

$$(13) \sum_n \sum_{0<s\leq t} \Delta(N^n - M)_s{}^2 < \infty, \text{ a.s. şi } \sum_n \sum_{0<s\leq t} \Delta(B^n - A)_s^2 < \infty, \text{ a.s}$$

Prima din inegalităţi rezultă din finitudinea integralei ei. Intr-adevăr ,

$$E(\sum_n \sum_{0<s\leq t} \Delta(N^n - M)_s{}^2) = \sum_n E(\sum_{0<s\leq t} \Delta(N^n - M))_s{}^2) \leq$$

$$\leq \sum_n E((N^n - M)_t)^2 = \sum_n ||(N^n - M)_t||^2 \leq (\sum_n ||N^n - M)_t||)^2$$

unde, la prima inegalitate, am aplicat corolarul 3.4 martingalului $((N^n - M)_{\min(s,t)})_{s\geq 0}$.

Pentru a doua din inegalitățile de la (13) ,observăm mai întîi că

$$\begin{aligned}(14)\ (\sum_n \sum_{0<s\leq t} \Delta(B^n - A)_s^2) &= (\sum_n \sum_{0<s\leq t} (\Delta|B^n - A|_s)^2 \leq \\ &\leq [\sum_n \sum_{0<s\leq t} (\Delta|B^n - A|_s)]^2.\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}E\sum_n \sum_{0<s\leq t} (\Delta|B^n - A|_s) &= \sum_n E \sum_{0<s\leq t} (\Delta|B^n - A|_s) \leq \sum_n E|B^n - A|_t \leq \\ &\leq \sum_n E|B^n - A|_\infty = \sum_n ||B^n - A||_v < \infty.\end{aligned}$$

Rezultă

$$\sum_n \sum_{0<s\leq t} (\Delta|B^n - A|_s) < \infty, a.s.,$$

şi pe baza lui (14), rezultă a doua din inegalitățile (13).

II. La acest punct vom aplica punctul I, pentru a reduce demonstrarea lui (5) la cazuri mai simple.

a) Fie $(T_n)_{n>0}$ un şir de opționale cu grafice disjuncte fiecare dintre ele fiind fie previzibilă, fie total inaccesibilă şi astfel încît salturile lui M şi cele ale lui A să fie situate pe graficele lui $T_n, n > 0$. Se poate presupune

$$M = M^c + \sum_n M^n \text{ şi } A = A^c + \sum_n A^n$$

unde $M^n = {}^c(K^n)$, adică compensatul lui $K^n = \Delta M_{T_n} \mathbf{1}_{\{t\geq T_n\}}$(corolarul 3.3) şi $A_t^n = \Delta A_{T_n} \mathbf{1}_{\{t\geq T_n\}}$, iar cele două sume sunt luate în spațiile normate $\mathcal{M}$ şi respectiv $\mathcal{V}_\mathcal{I}$. Din acest motiv se poate aplica I şi se poate presupune că

$$M = M^c + \sum_{n\leq N} M^n \text{ şi } A = A^c + \sum_{n\leq N} A^n$$

unde N este un număr natural. Dar procesele $M^n = {}^c(K^n), n = 1, 2, ..., N$ sunt procese din $\mathcal{V}_\mathcal{I}$ (teorema 3.6) deci se poate face abstracție că ele sunt şi martingale şi se pot îngloba în componenta pur discontinuă a lui A. Deci se poate presupune

$$X = X_0 + M + A$$

unde M este continuu şi A are un număr finit de salturi, pe care le şi rescriem sub forma $0 < R_1 \leq R_2 \leq ... \leq R_N$.

b) La acest punct vom arăta că putem presupune în plus , că X_0, M,şi A^c sunt mărginite.

Intr-adevăr, fie k un număr natural , şi

$$S_k = \inf\{t > 0 | \ |M_t| \geq k \ \text{ şi } \ |A|_t \geq k\}$$

Avem $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$, $M^{S_k} \to M$ în $\mathcal{M}$ cînd $k \to \infty$ (propoziţia 3.1) şi $A^{S_k} \to A$ în $\mathcal{V}_\mathcal{I}$, cînd $k \to \infty$,deoarece

$$\lim_{k\to\infty} ||A - A^{S_k}||_v = \lim_{k\to\infty} \int_{\{S_k<\infty\}} |A|_\infty dP = 0$$

Aplicînd I, dacă formula e adevărată pentru $X_0 1_{\{X_0\leq k\}} + M^{S_k} + A^{S_k}$, va fi adevărată şi pentru X. Dar din continuitatea lui M şi a lui A^c, rezultă că M^{S_k} şi $(A^c)^{S_k}$ sunt mărginite.

c) Vom arăta că se poate presupune A continuu (şi mărginit).

Mai întî facem observaţia că în formula (5) ambii membri au acelaşi salt. Intr-adevăr , saltul membului drept este

$$F'(X_{t-})\Delta X_t + F(X_t) - F(X_{t-}) - F^i(X_t)\Delta X_t = F(X_t) - F(X_{t-})$$

In acest calcul am ţinut cont de faptul că $< X^c, X^c >$ este continuu, deci integrala Stieljes raport cu el este continuă. Deasemenea, am ţinut cont de relaţia (12) din teorema 4.2 şi de punctul c) de la propoziţia 2.6.

Să presupunem acum formula adevărtă pentru $\tilde{X} = X_0 + M + A^c$ şi s-o demonstrăm pentru $X = X_0 + M + A$.

Avem $X_t = \tilde{X}_t$,pe intervalul stocastic $[0, R_1)$, deci $X_{t-} = \tilde{X}_{t-}$,pe intervalul stocastic $[0, R_1]$ şi vom avea

$$\int_0^t F(X_{s-})dM_s = \int_0^t F(\tilde{X}_{s-})dM_s \text{ , pe } [0, R_1]$$

Pentrucă $A = A^c$ pe $[0, R_1)$, avem

$$\int_0^t F(X_{s-})dA_s = \int_0^t F(\tilde{X}_{s-})d\ (A^c)_s \text{ , pe } [0, R_1)$$

Deorece $X^c = \tilde{X}^c$, ceilalţi termeni din formulă coincid. Deci ,dacă formula e adevărată pentru $\tilde{X}$ pe $[0,\infty)$,atunci ea este adevărată şi pentru X pe $[0, R_1)$.Dar mai sus am demonstrat că salturile ambilor membri în (5) sunt egale.Rezultă (5) adevărată pentru X pe $[0, R_1]$. Raţionamentul se translatează pentru a o verifica pe $[R_1, R_2]$,ş.a.m.d.

III. La acest punct vom stabili formula în cazul $X = X_0 + M + A$,unde M şi A sunt continue, $M_0 = 0 = A_0$ şi există $K > 0$, astfel încît $|X_0| \leq K, |M_t| \leq K$, oricare ar fi $t > 0$ şi $|A|_\infty \leq K$. Avem de demonstrat că

$$(15)\ F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F^{'}(X_s)dM_s +$$

$$+ \int_0^t F^{'}(X_s)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t F^{''}(X_s)d < M, M >_s$$

(sub această formă, formula de schimbare de variabilă este formula lui Ito). Observăm că ne putem dispensa de condiţia ca $F, F^{'}$şi $F^{''}$ să fie mărginite, pentrucă în formulă intervin doar restricţiile lor la intervalul $[-3K, 3K]$ şi acestea sunt mărginite (pentrucă sunt continue).

Fie $a, b \in [-3K, 3K]$. Formula lui Taylor se poate scrie sub forma

$$(16)\ F(b) = F(a) + F^{'}(a)(b-a) + \frac{1}{2}F^{''}(a)(b-a)^2 + r(a,b)$$

unde , datorită continuităţii uniforme a lui $F^{''}$,are loc majorarea

$$|r(a,b)| \leq \delta(|b-a|)(b-a)^2$$

şi $\delta(t)$ este o funcţie crescătoare care tinde la 0 cînd $t \to 0$.

Fie $\varepsilon > 0$ şi $(t_i)_{i\in\mathbf{N}}$ opţionale definite astfel : $t_0 = 0$,

$$t_{i+1} = \min\{t, t_i + \varepsilon, \inf\{s | s > t_i, |M_s - M_{t_i}| > \varepsilon, |A_s - A_{t_i}| > \varepsilon\}$$

Sirul $(t_i(\omega))_{i\in\mathbf{N}}$ este crescător şi are un număr finit de termeni diferiţi de t. Au loc inegalităţile

$$(17)\ \sup_i |t_{i+1} - t_i| \leq \varepsilon\ ,\ \sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \leq \varepsilon\ ,\ \sup_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| \leq \varepsilon,$$

şi

$$\sup_i \sup_{t_i \leq s,t \leq t_{i+1}} |X_s - X_t| \leq 4\varepsilon$$

deci toate supremumurile de mai sus tind (uniform în ω) la 0, cînd $\varepsilon \to 0$.

Fie $t > 0$ fixat. Aplicăm (16) şi obţinem:

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_i [F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i})] = \sum_i F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_i F''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + \sum_i r(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})$$

Notăm succesiv , cele trei sume din ultimul membru al acestei egalităţi cu S_1, S_2, S_3.Ele depind de ε şi demonstraţia este încheiată dacă vom arăta că, atunci cînd $\varepsilon \to 0$,avem $S_1 \to I_1 + I_2, S_2 \to I_3$ şi $S_3 \to 0$, în probabilitate, unde

$$I_1 := \int_0^t F'(X_s)dM_s,\ I_2 := \int_0^t F'(X_s)dA_s,\ I_3 := \int_0^t F''(X_s)d < M, M >_s$$

Să descompunem

$$S_1 = S_{11} + S_{12},$$

unde

$$S_{11} = \sum_i F'(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \text{ şi } S_{12} = \sum_i F'(X_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}).$$

Să evaluăm

$$||S_{11} - I_1||^2 = E[\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F'(X_s) - F'(X_{t_i}))dM_s]^2$$

Un calcul standard asupra unui martingal N din $\mathcal{M}$ de tipul următor:

$$E[\sum_i (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})]^2 = \sum_i E(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2$$

ne dă

$$||S_{11} - I_1||^2 = \sum_i E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (F'(X_s) - F'(X_{t_i}))dM_s]^2 =$$

$$= \sum_i E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (F'(X_s) - F'(X_{t_i}))^2 d < M, M >_s] =$$

$$= E\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F'(X_s) - F'(X_{t_i}))^2 d < M, M >_s =$$

$$= E[\sup_i \sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} (F'(X_s) - F'(X_{t_i}))^2 < M, M >_t] \to 0, \text{ cînd } \varepsilon \to 0,$$

datorită convergenţei (dominate) la 0 a integrandului. In calculul de mai sus am folosit şi izometria integralei stocastice.

Am arătat că $S_{11} \to I_1$ în L_2 (deci şi în probabilitate), cînd $\varepsilon \to 0$.

In continuare vom arăta că suma $S_{12} \to I_2$ a.s.(deci şi în probabilitate) , cînd $\varepsilon \to 0$. Intr-adevăr,

$$|S_{12} - I_2| = |\sum_i F'(X_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) - \int_0^t F'(X_s)dA_s| =$$

$$= |\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F'(X_{t_i}) - F'(X_s))dA_s| \leq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |F'(X_{t_i}) - F'(X_s)|d|A|_s \leq$$

$$\leq \sup_i \sup_{s\in[t_i,t_{i+1}]} |F'(X_s) - F'(X_{t_i})||A|_t \to 0 \text{ , cînd } \varepsilon \to 0.$$

Scriem $S_2 = S_{21}+S_{22}+S_{23}$, unde

$$S_{21} = \sum_i F''(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2,\ S_{22} = \sum_i F''(X_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2,$$

$$S_{23} = 2\sum_i F''(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}).$$

Sumele S_{22}şi S_{23}tind la 0 a.s., cînd $\varepsilon \to 0$, din cauza inegalităţilor

$$\begin{aligned} |S_{22}| &\leq C\sup_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}||A|_t \leq C\varepsilon|A|_t \\ |S_{23}| &\leq C\sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}||A|_t \leq C\varepsilon|A|_t \end{aligned}$$

Majorarea cu ε a decurs din (17).

Convergenţa lui S_{21} la I_3 nu este trivială. Se bazează pe următorea lemă.

Lema 4.1 *Dacă $M \in \mathcal{M}$ este mărginit, atunci $< M, M >_\infty \in L_2(\mathcal{F})$.*

Demonstraţie Aplicînd o formulă de integrare prin părţi pentru traiectoriile lui $< M, M >$ avem

$$< M, M >_{\infty}^{2} = 2 \int_0^{\infty} < M, M >_t d < M, M >_t$$

de unde

$$< M, M >_{\infty}^{2} = 2 \int_0^{\infty} (< M, M >_{\infty} - < M, M >_t) d < M, M >_t$$

Integrăm această relaţie membru cu membru şi aplicăm teorema 2.2 Obţinem

$$E(< M, M >_{\infty}^{2} = 2E \int_0^{\infty} (< M, M >_{\infty} - < M, M >_t) d < M, M >_t =$$

$$= 2P < M, M > (\pi^o x),$$

unde

$$x_t = < M, M >_{\infty} - < M, M >_t$$

şi π^o est proiecţia opţională. Dar ţinînd cont că $< M, M >$ este continuu şi folosind proprietăţile lui π^o (corolarul 1.4.),avem

$$(\pi^o x)_t = m_t - \ < M, M >_t$$

unde $(m_t)_{t \geq 0}$ este un proces adaptat continuu la dreapta, cu limite finite la stînga, ce verifică $m_t = E(< M, M >_{\infty} |\mathcal{F}_t)$ a.s. Revenind la calculul de mai sus avem

$$E(< M, M >_{\infty}^{2}) = 2E \int_0^{\infty} [E(< M, M >_{\infty} |\mathcal{F}_t) - < M, M >_t] d < M, M >_t$$

$$= 2E \int_0^{\infty} [E(M_{\infty}^2 | \mathcal{F}_t) - M_t^2] d < M, M >_t \leq 2K^2 E(< M, M >_{\infty}$$

unde constanta strict pozitivă K majorează martingalul M.

Observaţie Se observă că în ipotezele lemei , martingalul $M^2 - < M, M > \in \mathcal{M}$.

Revenind la convergenţa lui S_{21} la I_3, scriem

$$S_{21} - I_3 = T_1 + T_2$$

unde

$$T_1 = \sum_i F''(X_{t_i})[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i})] ,$$

$$T_2 = \sum_i F''(X_{t_i})(< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i}) - \int_0^t F''(X_s) d < M, M >_s$$

Vom arăta că $T_1 \to 0$ în L_2 şi $T_2 \to 0$ în L_1, de unde $S_{21} \to I_3$ în probabilitate (cînd $\varepsilon \to 0$).

Avem

$$||T_1||^2 = ||\sum_i F''(X_{t_i})[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i})]||^2 =$$

$$= \sum_i ||F''(X_{t_i})[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i})]||^2$$

În această evaluare am folosit ortogonalitatea termenilor mixti din dezvoltarea pătratului sumei. Ortogonalitatea rezultă din

$$E\{F''(X_{t_i})[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i})]|\mathcal{F}_{t_i}\} =$$

$$= E(F''(X_{t_i})[(M^2_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_{i+1}}) - ({M_{t_i}}^2 - < M, M >_{t_i})]|\mathcal{F}_{t_i}) =$$

$$= F''(X_{t_i})[E(M^2_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_{i+1}} |\mathcal{F}_{t_i}) - ({M_{t_i}}^2 - < M, M >_{t_i})] = 0$$

unde am folosit faptul că $M^2 - < M, M >$ este martingal.

Reluăm

$$||T_1||^2 = \sum_i E\{F''(X_{t_i})[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i})]\}^2 \leq$$

$$\leq 2C^2 \sum_i E[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4 + (< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i})^2] \leq$$

$$\leq 2C^2 E[\sup_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2] +$$

$$+ 2C^2 E[\sup_i (< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i}) \sum_i (< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i}]$$

$$\leq 2C^2 \varepsilon^2 E[M_t^2] + 2C^2 E[\sup_i (< M, M >_{t_{i+1}} - < M, M >_{t_i}) < M, M >_t]$$

Este evident că în ultimul membru de mai sus, primul termen tinde la 0 odată cu ε. Al doilea are aceeaşi proprietate :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_i(<M,M>_{t_{i+1}}-<M,M>_{t_i})=0$$

din cauza uniform continuităţii traiectoriilor lui $<M,M>$ pe $[0,t]$ şi funcţia de sub E este dominată de $<M,M>_t^2$ care este integrabilă din lemă.

Să evaluăm acum T_2.Avem

$$E(|T_2|)=E|\sum_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}(F''(X_{t_i})-F''(X_s))d<M,M>_s|\leq$$

$$\leq E(\sup_i\sup_{t_i\leq s\leq t_{i+1}}|F''(X_{t_i})-F''(X_s)|<M,M>_t)$$

Ultima integrală tinde la zero cînd $\varepsilon\to 0$, din cauza uniform continuităţii lui $s\to F''(X_s):[0,t]\to\mathbf{R}$ şi a teoremei lui Lebesgue de convergenţă dominată.

Rămîne de studiat termenul S_3. Avem

$$(18)\ |S_3|\leq\sum_i\delta(|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|)(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2\leq$$

$$\leq 2\delta(2\varepsilon)(\sum_i[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2+(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})^2]$$

Avem

$$\delta(2\varepsilon)(\sum_i(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})^2\leq\delta(2\varepsilon)\varepsilon|A|_t$$

care tinde la 0 cînd $\varepsilon\to 0$. Termenul care a rămas din dezvoltatea (18) va tinde la 0 în L_1. Intr-adevăr

$$E[\delta(2\varepsilon)\sum_i(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2]\leq\sqrt{E[\delta^2(2\varepsilon)]}\sqrt{E[\sum_i(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2]^2}$$

şi va fi suficient să demonstrăm că , dacă $|M_s|\leq K$,oricare ar fi $s\in[0,t]$, avem

$$\sup_{\varepsilon>0}\sqrt{E[\sum_i(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2]^2}<\infty.$$

Intr-adevăr, avem

$$E[\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2]^2 = E[\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4] +$$

$$+2E[\sum_i \sum_{j>i} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 \leq 4K^2 E[\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2] +$$

$$+2E\{\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 E[\sum_{j>i} (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 | \mathcal{F}_{t_{i+1}})]\} =$$

$$= 4K^2 E(M_t^2) + 2E\{\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 E[\sum_{j>i} (M_{t_{j+1}}^2 - M_{t_j}^2 | \mathcal{F}_{t_{i+1}})]\} \leq$$

$$\leq 4K^4 + 2E[\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 E(M_t^2 | \mathcal{F}_{t_{i+1}})] \leq$$

$$\leq 4K^4 + 2K^2 E \sum_i (M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2) = 4K^4 + 2K^2 E(M_t^2) \leq 6K^4$$

Teorema este complet demonstrată.

`Comentarii` Formula de schimbare de variabilă admite următoarea extensie :

Teorema 4.6 *Fie $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, o funcţie cu derivate parţiale de primele două ordine continue şi mărginite şi fie $X = (X^1, X^2, ..., X^n)$ un proces n-dimensional cu componentele semimartingale. Atunci, pentru $t \in [0, \infty)$ are loc egalitatea*

$$(19)\ F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{s-}) dX_s +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}) d < (X^i)^c, (X^j)^c >_s +$$

$$+ \sum_{0<s\leq t} [F(X_s) - F(X_s) - \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{s-}) \Delta X_s.$$

Demonstraţia acestui rezultat se omite deoarece comportă doar notaţii mai complicate faţă de cea precedentă.

Aplicaţii

Să presupunem că M este un martingal mărginit. Să aplicăm formula (5) în cazul lui $F(x) = x^2$. Aceasta este posibil , deoarece M este mărginit şi atunci derivatele lui F se pot considera mărginite. Se obţine

$$M_t^2 = M_0^2 + 2\int_0^t M_{s-}dM_s + \quad < M^c, M^c >_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta M_s^2$$

sau, ţinînd cont de definiţia 4.2

$$(20)\ 2\int_0^t M_{s-}dM_s = M_t^2 - [M, M]_t$$

Dacă N este alt martingal mărginit, prin calcule algbrice evidente se polarizează formula (20), obţinîndu-se

$$(21)\ M_tN_t = \int_0^t M_{s-}dN_s + \int_0^t N_{s-}dM_s + [M, N]_t.$$

Formula (21) este adevărată şi pentru două semimartingale mărginite X şi Y. Dăm forma ei diferenţială :

$$(22)\ d(X_tY_t) = X_{t-}dY_t + Y_{t-}dX_t + d[X, Y]_t$$

în care am folosit definiţia 4.5. O vom numi formula de integrare prin părţi , din cauza analogiei cu cea din cazul proceselor crescătoare deterministe.

BIBLIOGRAFIE

[1] CHUNG, K.L. *A course in probability Theory* Academic press, NY, 1976

[2] CUCULESCU, I *Teoria Probabilităţilor* ed. Bic All ,1998

[3] DELLACHERIE, C. *Capacites et Processus Stochastiques* Springer-Verlag, Berlin ,1972

[4] DOOB, J.L. *Measure Theory* Springer-Verlag NewYork Inc, 1994

[5] ELLIOTT,J.R. *Stochastic Calculus and Applications,* Springer -Verlag New York Inc , 1982

[6] HARISSON, M.J. and PLISKA, S.R.*Martingales and Stochastic Integrals in the Continuous Trading* , Stoch.Proc. 13 ,288-260,1981

[7] KARATSAS, I. and SHREVE, S.*Brownian Motion and Stochastic Calculus,* Springer-Verlag, 1991

[8] LICEA, G. *Martingale şi Aplicaţii,* Tipografia Universităţii, 1979

[9] LICEA, G *Procese şi Aplicaţii (partea I)* Editura Universităţii din Bucuresti, 2003

[10] MEYER, P.A. *Probablity and Potentials,*Blaisdell Publishing Company,1966

[11] MEYER, P.A. *Un cours sur les Integrales Stochastiques,* Lectures Notes in Mathematics, 511, Springer-Verlag,1976

[12] MEYER, P.A. and DELLACHERIE, C. *Probabilities and Potential B Theory of Martingales* North-Holland, 1982

[13] PROTTER,P. *Stochastic Integration and Differential Equations,* Springer-Verlag, 1990

[14] TUDOR, C *Procesos Estocasticos,* Sociedad Matematica Mehicana,1997

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 1349/2005
la Tipografia Editurii Universității din București

ISBN 973575745-1
ISBN 973575997-7
9 789735 759971

Lei 95000